

OPERACIONALIZAÇÃO DO PROCESSO ANALÍTICO HIERÁRQUICO USANDO MATRIZES INCOMPLETAS DE COMPARAÇÕES PAREADAS

Camila Costa Dutra
Flávio Sanson Fogliatto

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - DEPROT

Resumo

O Processo Analítico Hierárquico (AHP – *Analytic Hierarchy Process*) é uma ferramenta de apoio à tomada de decisão que permite identificar a melhor alternativa em um grupo de candidatas, através de critérios pré-definidos de seleção. A coleta de dados para a operacionalização do AHP está baseada no preenchimento de matrizes de comparações pareadas. Neste artigo propõe-se a operacionalização do AHP utilizando matrizes incompletas de comparações pareadas. A coleta de dados proposta reduz a redundância implícita no esquema usual de coleta de dados do AHP e otimiza esta etapa crucial na utilização do método. Como a consistência das avaliações em uma matriz de comparações é mensurada através da análise de sua aderência à transitividade, o artigo apresenta o resultado de estudos de simulação para a determinação de índices que permitam a avaliação de consistência em matrizes incompletas de comparações. Um estudo de caso na indústria alimentícia ilustra os desenvolvimentos propostos.

Palavras- chave: AHP. Coleta de Dados. Matrizes de comparação incompletas.

Abstract

AHP (Analytic Hierarchy Process) is a tool used in decision making for selecting the best among a set of alternatives, given some pre-defined criteria. Data collection in AHP is typically performed using matrices where all pairs of elements are compared. In this article we propose a new data collection scheme for AHP based on the use of incomplete comparison matrices. Such scheme reduces the redundancy in data collection that is implicit to AHP, while optimizing it. Since consistency in evaluations in a comparison matrix is based on their compliance to transitivity, we present the results of simulations aimed at determining indices for verifying the consistency of incomplete pairwise comparison matrices. A case study from the food industry illustrates the propositions in the paper.

Keywords: AHP. Data collection. Incomplete pairwise comparison matrices.

1. Introdução

O Processo Analítico Hierárquico (AHP - *Analytic Hierarchy Process*) é uma ferramenta de apoio à tomada de decisão que permite identificar a melhor alternativa em um grupo de candidatas, tendo em vista critérios pré-definidos de seleção. O AHP é baseado em três etapas básicas: (i) organização do problema em uma estrutura hierárquica que reflita as relações existentes entre os critérios de decisão e as alternativas candidatas; (ii) comparação pareada entre elementos posicionados em um nível hierárquico com relação a elementos no nível superior adjacente; e (iii) análise das matrizes de comparações geradas em (ii) através do cálculo de autovetores e autovalores principais, e de indicadores de desempenho deles derivados, tais como os índices de consistência das avaliações. O AHP foi originalmente proposto por Saaty (1977; 1980), tendo seus fundamentos matemáticos aprofundados e ampliados em Zahedi (1984) e Saaty & Vargas (1987).

O AHP é uma das ferramentas de apoio à tomada de decisão multicritério com maior número de aplicações práticas reportadas na literatura, particularmente em problemas envolvendo avaliações subjetivas. As áreas de aplicação incluem engenharia, educação, indústria e setores governamentais; os problemas abordados são tipicamente de seleção e avaliação de alternativas. O AHP é tipicamente utilizado como ferramenta isolada de priorização, mas aplicações em conjunto com o QFD (*Quality Function Deployment* ou Desdobramento da Função Qualidade) podem ser encontradas nos trabalhos de Koksall & Egitman (1998) e Myint (2003). O trabalho de Zahedi (1986) traz o primeiro levantamento bibliográfico de aplicações do AHP, atualizado, posteriormente, por Vargas (1990), Tummala & Wan (1994) e, mais recentemente, por Vaidya & Kumar (2006).

Guglielmetti et al. (2005) realizaram uma comparação entre o AHP e outros métodos de análise multicritério como o Electre e o MAHP. Os métodos foram avaliados quanto as suas características de desempenho na entrada dos dados, saída dos dados e interface entre tomador de decisão e método. Nesse intento, foram considerados principalmente os seguintes aspectos: consistência, lógica, transparência, facilidade de uso, quantidade de aplicações práticas e publicações científicas, tempo requerido para o processo de análise e disponibilidade de software.

Seguindo os critérios propostos por Guglielmetti et al. (2005), optou-se pela adoção do AHP como técnica multicritério por possuir atributos desejáveis para a realização do presente estudo, tais como (STEIGUER et al., 2005): (i) é um processo de decisão estruturado que pode ser documentado e repetido; (ii) é aplicável a situações que envolvem julgamentos subjetivos; (iii) utiliza tanto dados quantitativos quanto qualitativos; (iv) provê medidas de consistência das preferências; (v) há uma ampla documentação sobre suas aplicações práticas na literatura e (vi) seu uso é apropriado para grupos de decisão.

A coleta de dados para a operacionalização do AHP está baseada no preenchimento de matrizes de comparações pareadas. Cada matriz traz o resultado das comparações de pares de elementos em um nível da estrutura hierárquica, o que caracteriza o problema de análise de decisão, com relação a um elemento em um nível hierárquico superior adjacente. Assim, a m -ésima linha da matriz de comparações apresenta o resultado das comparações entre o elemento m , correspondente ao rótulo da linha, e os demais $m - 1$ elementos da matriz. Para um nível hierárquico apresentando D elementos, um total de $D(D - 1)/2$ comparações serão necessárias para o preenchimento da matriz de comparações. Quanto maior o número de níveis hierárquicos e de elementos em cada nível, mais complexa será a coleta de dados, com maior chance de imposição de fadiga aos analistas.

Neste artigo propõe-se a operacionalização do AHP utilizando matrizes incompletas de comparações pareadas. A sistemática de coleta de dados proposta reduz a redundância implícita no esquema usual de coleta de dados do AHP, em que um par de elementos (m, n) em um determinado nível hierárquico é comparado diretamente uma vez e indiretamente várias vezes, se as relações de transitividade nas avaliações forem consideradas. Como a consistência das avaliações em uma matriz de comparações é mensurada justamente através da análise de sua aderência à transitividade, o artigo também apresenta o resultado de estudos de simulação

para a determinação de índices que permitam a avaliação de consistência em matrizes incompletas de comparações. Os estudos de simulação consideram dois cenários: em um primeiro, comparações são realizadas pelos analistas usando uma escala discreta de valores, como usualmente preconizado no AHP; em um cenário alternativo, comparações são realizadas usando uma escala aproximadamente contínua.

Além das contribuições teóricas delineadas acima, o artigo traz uma importante contribuição prática para usuários do AHP: a otimização da coleta de dados na utilização da ferramenta. A literatura reporta aplicações do AHP onde o número de elementos em um dado nível hierárquico da matriz de comparações é superior a 10, resultando em matrizes de comparações onde 50 ou mais comparações pareadas são demandadas; ver, por exemplo, Babic & Plazibat (1998) e Cagno *et al.* (2001). É natural que a qualidade da análise deteriore à medida que o esforço demandado na coleta de dados aumenta. Assim, a sua racionalização representa um desenvolvimento de importante impacto prático.

Limitações do AHP foram analisadas por diversos autores estando vinculadas a diferentes aspectos do método. Uma discussão sobre as principais críticas ao AHP pode ser encontrada em Belton & Stewart (2002) e Smith & von Winterfeldt (2004). De acordo com Schoner & Wedley (1989), Dyer (1990) e Barzilai (1998) o método possui uma restrição matemática que gera dependência entre a importância relativa dos critérios e as importâncias das alternativas. Os autores questionam a veracidade do terceiro axioma proposto por Saaty (1986), uma vez que acreditam que critérios em níveis diferentes deveriam ser independentes entre si.

A comparação aos pares proposta por Saaty (1990) utiliza uma escala de medidas de 1 a 9. Tal escala, segundo discussão na literatura, pode induzir a resultados discutíveis. Barzilai (1999, 2000, 2001), Stewart (1992) e Forman & Gass (2001) discutem a escala sob diversos aspectos, como a inexistência de um zero absoluto que a torna uma escala ordinal. O trabalho de Hua *et al.* (2008) questiona a condição prévia de que o avaliador seja capaz de realizar uma comparação pareada entre alternativas, o que na prática pode não ser verdadeiro.

A utilização do método do autovetor principal para derivar os vetores de prioridade é também questionada nos trabalhos de Crawford & Williams (1985) e Barzilai (1987, 1997). Os autores sugerem o uso da média geométrica, alegando um melhor embasamento teórico para seu uso. O trabalho de Bana e Costa & Vansnick (2008) tem como principal conclusão que a utilização do método do autovetor principal pode violar a ordem das alternativas que é fundamental para a tomada de decisão, que deve respeitar os valores e julgamentos.

Belton & Gear (1982), Schoner & Wedley (1989) e Dyer (1990) foram os primeiros a apontar a principal limitação do AHP, relacionada à mudança da posição relativa de algumas das opções no momento da introdução de novas opções no problema (conhecido como problema da reversão de *ranking*). A legitimidade do problema de reversão de *ranking* continuou a ser discutida após sua proposição original, como mostra os trabalhos de Schenkermann (1991, 1994), Forman (1993), Barzilai & Golany (1994), Barzilai (1999, 2000, 2001), Forman & Gass (2001) e Wang & Elhag (2006).

Com objetivo de contornar o problema, Belton & Gear (1982) sugeriram a normalização dos autovetores de pesos das alternativas utilizando seu valor máximo ao invés de sua soma. Os autores Schoner & Wedley (1989) apresentaram uma proposta que exige uma modificação nos pesos dos critérios quando uma alternativa é adicionada ou removida. A sua solução é prática, porém sua aplicação é muito restrita, já que em poucos casos sabe-se os valores absolutos de cada alternativa bem como o fator de escala dos critérios. Barzilai e Golany (1994) mostram que se a normalização não for realizada pode-se prevenir o problema de reversão, e sugerem um método de agregação multiplicativa que substitui vetores de pesos normalizados por matrizes de razão de pesos.

Apesar das limitações teóricas identificadas na técnica, o AHP continua sendo uma das opções mais populares na análise de decisão multicriterial, como atesta o levantamento de aplicações reportadas na literatura, realizado por Vaidya & Kumar (2006). Cabe ressaltar que as proposições neste artigo, por focarem especificamente na otimização da etapa de coleta de

dados, não têm impacto sobre as deficiências do método acima discutidas.

O restante do artigo está organizado da seguinte forma. Na seção 2 apresentam-se os conceitos fundamentais do AHP. Na seção 3 são apresentados os desenvolvimentos teóricos que constituem a contribuição deste artigo. Um estudo de caso na indústria de alimentos é apresentado na seção 4. Uma conclusão encerra o artigo na seção 5.

2. Fundamentos do Processo Analítico Hierárquico

Matrizes de comparações são matrizes quadradas recíprocas, com valores unitários na diagonal principal; seu formato geral vem dado na Figura 1. Os elementos nas matrizes de comparações assumem valores na escala ($1/9, 9$); aplicações usuais do AHP costumam limitar-se a utilização de valores inteiros da escala. Quando dois elementos m e n são comparados usando opinião de especialistas, o valor 1 denota uma situação onde não existe diferença entre m e n . Quando m é muito mais importante ou preferido com relação à n , o valor 9 é utilizado. Se o oposto for verdadeiro, o valor $1/9$ é utilizado. Valores intermediários da escala denotam situações de compromisso.

	Elemento 1	Elemento 2	...	Elemento D
Elemento 1	1	a_{12}	...	a_{1D}
Elemento 2	$1/a_{21}$	1	...	a_{2D}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Elemento D	$1/a_{D1}$	$1/a_{D2}$...	1

Figura 1: Formato geral da matriz de comparações

As matrizes de comparações são designadas por A_{le} se o elemento e no nível l é utilizado como critério de comparação de elementos em um nível inferior diretamente conectado a l . Elementos em A_{le} são designados por a_{mn} , $m, n = 1, \dots, D$, onde $D \times D$ indica a dimensão de A_{le} . Deseja-se calcular um vetor de pesos para cada matriz de comparações A_{le} , os quais serão finalmente combinados em vetor final de pesos, a partir do qual se identifica a solução para o problema de análise de decisão representado na estrutura hierárquica. O vetor de pesos de A_{le} é designado por $w_{le} = (w_1, w_2, \dots, w_D)$.

Saaty (1980) demonstra que o vetor de pesos w_{le} corresponde ao autovetor principal de A_{le} . Ao compararem-se dois elementos m e n está-se, na verdade, estimando a razão de seus pesos de importância, ou seja, $a_{mn} = w_m/w_n$. Os autovetores informam os valores de w_m e w_n a partir das estimativas a_{mn} . Seja λ_{max} o autovalor principal de uma matriz A ; seu autovetor w correspondente é dado por:

$$Aw = \lambda_{max}w \quad (1)$$

A análise do exemplo na Figura 2 demanda o preenchimento de 7 matrizes de comparação e a determinação de seus 7 vetores de pesos correspondentes. Para combinar os vetores de peso em um vetor final de pesos, utiliza-se o princípio da composição hierárquica concebido por Saaty (1980), o qual é ilustrado a seguir a partir do exemplo na Figura 2.

Inicia-se combinando os vetores de peso oriundos das análises nos níveis 2 e 3 da hierarquia em um único vetor. Para tanto, organiza-se os vetores de coluna w_{21}, \dots, w_{23} em uma matriz W_2 . O vetor final de pesos, que indicará a melhor alternativa dentre aquelas listadas no nível 3 da hierarquia, é determinado a partir do produto vetorial $W_2 w_{11}$.

Para que uma matriz de comparações seja considerada consistente, as identidades $a_{mn} = w_m/w_n$ e $a_{mn} = 1/a_{nm}$ devem se verificar para todo m e n . Além disso, para quaisquer elementos m, n e p na matriz, $a_{mn} \times a_{np} = a_{mp}$. Uma medida de consistência das avaliações em uma matriz pode ser derivada de λ_{max} , na eq. (1). Mediante perfeita consistência, $\lambda_{max} = D$ para uma matriz de ordem D . Caso contrário, Saaty (1980) demonstra que $\lambda_{max} > D$ e propõe um índice de consistência dado por:

$$CI = (\lambda_{max} - D)/(D - 1) \quad (2)$$

Para concluir sobre a consistência da matriz, o índice CI deve ser comparado com um índice aleatório de consistência RI , correspondente à média dos índices de consistência obtidos a partir de 500 matrizes de comparações de ordem D cujos valores a_{mn} foram selecionados aleatoriamente da escala $(1/9, 9)$. Valores de RI para matrizes de diferentes ordens estão apresentados na Tabela 1 (SAATY, 1980). Observe que os valores de RI aumentam com a ordem D da matriz, conforme esperado.

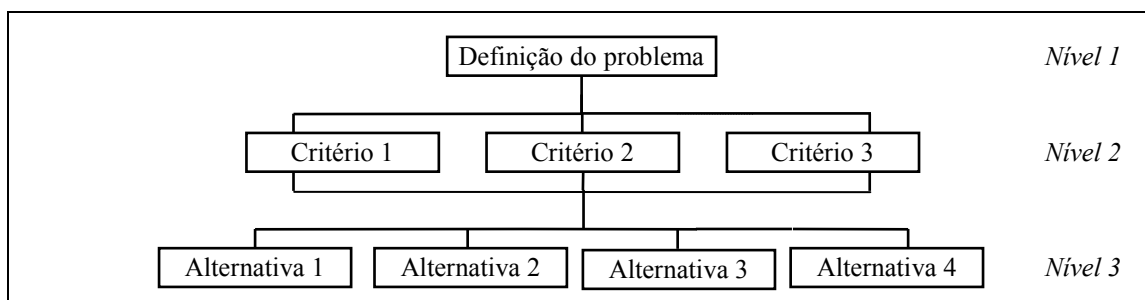


Figura 2: Problema de análise de decisão em forma hierárquica

A consistência de uma matriz de comparações é medida a partir da razão de consistência CR , dada por:

$$CR = CI/RI \quad (3)$$

O valor limite para CR proposto por Saaty (1980) é 0,1. Uma matriz de comparações com $CR > 0,1$ deveria ter suas comparações revistas em busca de uma melhor consistência. A justificativa para a escolha de valor limite para CR feita por Saaty (1980) pode ser encontrada em Vargas (1982).

Tabela 1: Valores de índice aleatório de consistência (RI) para matrizes de ordem $D = 3, \dots, 10$

D	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,51

Fonte: Saaty, 1980

3. Adaptação no procedimento de coleta de dados do AHP

O preenchimento completo de uma matriz de comparações pode causar fadiga nos avaliadores, já que cada um de seus D elementos deverá ser usado como elemento de referência e comparado com os demais. Neste artigo propõe-se uma adaptação no procedimento de coleta de dados do AHP onde, a partir do preenchimento de uma linha qualquer da matriz de comparações, completa-se as demais linhas com base nas relações que caracterizam os elementos das matrizes [eq. (4)] e pressupondo perfeita consistência nas avaliações realizadas. As matrizes assim obtidas são utilizadas para gerar uma nova matriz de pontos de centro, a partir da qual são calculados o vetor de pesos e o índice de consistência.

$$\begin{cases} a_{mn} = 1/a_{nm} \\ a_{mn} = a_{mk} \times a_{kn} \end{cases}, \text{ para quaisquer elementos } m, n \text{ e } k \quad (4)$$

A adaptação aqui proposta foi realizada em três etapas. Primeiramente procedeu-se à validação dos valores de Índice Aleatório de Consistência (RI) apresentados por Saaty (1980). Desta forma, confirmou-se o procedimento para geração de novas tabelas de valores de referência. Posteriormente, foi gerada uma nova tabela de RI s para casos onde valores de

juízo nas comparações forem obtidos da escala de $1/i$ a i , e i possa assumir qualquer valor entre 1 e 9 (limitou-se a simulação a valores de i com duas casas após a vírgula). Por fim, apresentou-se o procedimento de coleta de dados e desenvolveu-se uma tabela de índices aleatórios de consistência para os casos onde a matriz de comparações é parcialmente preenchida.

3.1 Validação dos valores do Índice Aleatório de Consistência (RI)

Esta seção inicia com a validação dos índices aleatórios de consistência (RI) propostos por Saaty (1980) e apresentados na Tabela 1. Tais índices foram obtidos pelo autor a partir de simulações onde valores de uma escala de $1/i$ a i , $i = 1, \dots, 9$, foram aleatoriamente gerados e utilizados para escrever matrizes de comparações, a partir das quais se calcularam os valores de CI. Os valores de RI correspondem à média dos CIs obtidos para matrizes de diferentes ordens. Naquela simulação, entretanto, somente 17 valores ($1/9, 1/8, \dots, 1/2, 1, 2, \dots, 8, 9$) foram utilizados na construção das matrizes.

Para contornar a limitação na simulação em Saaty (1980), nesta seção apresenta-se uma nova tabela com valores de RI gerados a partir de valores aleatórios obtidos de uma escala contínua entre $1/i$ e i (onde i assume qualquer valor entre 1 e 9, com até duas casas decimais; apesar da escala não ser estritamente contínua, no restante do artigo ela será referida como tal). Tais valores de RI são utilizados no cálculo da razão de consistência para casos onde a matriz de comparações é completamente preenchida (ou seja, todos os elementos da matriz são utilizados como elemento de referência). Na validação dos RIs foram seguidos 4 passos, descritos a seguir.

Passo 1: Geração de matrizes

Foram geradas aleatoriamente 500 matrizes de ordem D ($D = 3, 4, 5, \dots, 10$). As matrizes, designadas por A_{le} , foram geradas com valores de juízo a_{mn} aleatoriamente selecionados na escala de $1/i$ a i , onde $i = 1, \dots, 9$. As matrizes foram construídas em planilha eletrônica e os números aleatórios foram obtidos por programação em *Visual Basic for Applications* (VBA). Valores na escala foram amostrados com a mesma probabilidade $p = 1/17$. Nas matrizes foram preenchidas as células acima da diagonal principal; os valores abaixo da diagonal principal satisfazem a propriedade $a_{mn} = 1/a_{nm}$.

Passo 2: Cálculo dos autovetores e autovalores principais das matrizes

O autovetor principal w_{le} e seu autovalor correspondente $\lambda_{max,le}$, para cada matriz A_{le} , foram obtidos utilizando a eq. (1).

Passo 3: Cálculo do Índice de Consistência – CI

Para cada matriz A_{le} , calculou-se o valor correspondente de CI a partir da eq. (2).

Passo 4: Cálculo do Índice Aleatório de Consistência – RI

Para cada ordem de matriz simulada no Passo 1, calculou-se a média dos 500 valores de CI obtidos; o valor resultante representa o índice aleatório de consistência correspondente.

Um dos objetivos do estudo de Vargas (1982) foi a validação dos valores de RI apresentados por Saaty (1980). Para tanto, o autor organizou uma simulação com matrizes de ordem $D = 3, \dots, 13$, para as quais obteve valores de λ_{max} , os quais verificou seguirem uma distribuição normal truncada. Os valores dos índices de consistência também resultaram normalmente distribuídos, com média e desvio-padrão dados por:

$$\bar{\mu} = \frac{\mu(D) - D}{(D-1)} \quad (5)$$

$$\frac{s(D)}{\sqrt{500\sqrt{D-1}}} = \sigma(D) / \sqrt{500} \quad (6)$$

Os valores de RI encontrados por Vargas (1982), apresentados na Tabela 2,

assemelham-se àqueles encontrados por Saaty (1980), apresentados na Tabela 1.

Tabela 2: Valores de RI e seus desvios-padrão para matrizes de ordem $D = 3, \dots, 9$

D	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{\mu} = RI$	0,5381	0,8832	1,1045	1,2525	1,3334	1,4217	1,4457
$DesvPad = \sigma(D)/\sqrt{500}$	0,0433	0,0475	0,0470	0,0420	0,0371	0,0322	0,0288

Fonte: Vargas, 1982

No presente trabalho, a média, correspondente ao valor de RI , e o desvio-padrão dos 500 valores de CI obtidos para matrizes de ordem D , estão apresentados na Tabela 3. Esses valores validam os resultados de Vargas (1982), já que os intervalos $\bar{\mu} = \pm 3\sigma$ da simulação apresentam amplitude inferior aos intervalos encontrados pelo autor. Os valores na Tabela 3 também são semelhantes àqueles encontrados por Saaty (1980), na Tabela 1. Utilizou-se, assim, o procedimento em 4 passos, apresentado anteriormente, nos demais desenvolvimentos aqui reportados.

Tabela 3: Valores validados de RI e desvio-padrão para matrizes de ordem $D = 3, \dots, 10$

D	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{\mu} = RI$	0,561	0,889	1,135	1,267	1,370	1,443	1,475	1,507
$DesvPad = \sigma(D)/\sqrt{500}$	0,0328	0,0282	0,0241	0,0186	0,0169	0,0121	0,0106	0,0102

Conforme mencionado no início desta seção, construiu-se uma tabela de valores de índice aleatório de consistência (RI) para utilização em cenários onde as matrizes de comparações forem completamente preenchidas com quaisquer valores entre $1/i$ e i (onde i assume qualquer valor entre 1 e 9, com até duas casas decimais). Tais valores podem ocorrer, por exemplo, quando são utilizadas médias de avaliações de diferentes analistas na montagem das matrizes de comparações.

Para construção da nova tabela de RI s, utilizou-se o procedimento em 4 passos anteriormente descrito. Cabe salientar que no Passo 1, as matrizes aleatórias de comparação foram geradas amostrando valores no intervalo entre $1/i$ e i , $i = 1, \dots, 9$, limitando-se a simulação a valores com até duas casas decimais. Consequentemente, os valores na escala foram amostrados com uma mesma probabilidade $p=1/16001$. A Tabela 4 apresenta os índices aleatórios de consistência resultantes da simulação, bem como seus respectivos desvios-padrão.

Tabela 4: Valores de RI para o caso de matrizes com comparações avaliadas usando uma escala contínua de $1/i$ a i

D	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{\mu} = RI$	0,294	0,501	0,658	0,704	0,752	0,790	0,821	0,856
$DesvPad = \sigma(D)/\sqrt{500}$	0,01676	0,01723	0,01579	0,01292	0,01102	0,009072	0,008392	0,007515

Comparando-se os resultados nas Tabelas 3 e 4, verifica-se que os valores de RI na Tabela 3 são aproximadamente duas vezes maiores do que aqueles apresentados na Tabela 4. Tal resultado era esperado já que a simulação que gerou os resultados na Tabela 3 utilizou uma amostragem aleatória de um conjunto de 17 valores para gerar as matrizes de comparações, ao passo que a simulação que gerou os resultados na Tabela 4 foi baseada em uma amostragem aleatória de um conjunto de 16001 valores. Na prática, isso implica em uma menor tolerância com relação à inconsistência em avaliações utilizando valores aproximadamente contínuos de escala.

3.2 Utilização de matrizes incompletas de comparações pareadas e determinação de seus valores correspondentes de *RI*

O procedimento de coleta de dados aqui proposto é descrito a seguir. Considere a execução de $M < D$ conjuntos de avaliações pareadas pelo analista k . Em cada conjunto de avaliações, compara-se o elemento m , correspondente ao rótulo da linha, com os demais $m - 1$ elementos da matriz. A coleta padrão de dados do AHP prevê a realização de D conjuntos de avaliações; entretanto, como $a_{mn} = 1/a_{nm}$, $D(D - 1)/2$ e não $D \times D$ comparações serão necessárias para o preenchimento integral da matriz de comparações. No procedimento aqui proposto, pressupõe-se que os M conjuntos de comparações realizados resultem em total de avaliações inferior a $D(D - 1)/2$. A escolha dos M conjuntos de comparações a serem realizadas deve estar baseada nos elementos m que guiam as comparações em cada conjunto. Idealmente, ao selecionarem-se $M < D$ conjuntos para avaliação, deve-se selecionar aqueles com elementos m os mais distintos possíveis relativamente ao critério que guiará as comparações. Tal escolha é baseada em conhecimento de especialistas, familiarizados com o problema de análise de decisão abordado.

Os resultados de cada conjunto de avaliações serão registrados em M matrizes separadas, as quais conterão uma única linha com números oriundos das comparações feitas entre o elemento m , correspondente ao rótulo da linha preenchida, e os demais $D - 1$ elementos correspondentes aos rótulos das colunas da matriz. A matriz será completada usando as relações da eq. (4). A consistência do analista k , responsável pelas comparações, será perfeita quando as M matrizes resultantes forem iguais, o que dificilmente ocorrerá. No caso de inconsistência, os pontos de centro dos M resultados disponíveis nas matrizes podem ser calculados para a obtenção de uma matriz de comparações de compromisso, designada como matriz de pontos de centro. Utiliza-se a referida matriz para o cálculo de um vetor de pesos, com valores correspondentes à importância (ou preferência) dos elementos conforme percebidos pelo analista k . Esta matriz também possibilita a determinação de uma medida de consistência para o analista.

A obtenção do ponto de centro de um conjunto de valores a_{mn} é descrita a seguir. Inicialmente, os valores a_{mn} devem ser inversamente transformados em valores z utilizando a expressão:

$$z = \begin{cases} s(a_{mn} - 1)/8 & a_{mn} \geq 1 \\ (1 - a_{mn}^{-1})s/8 & a_{mn} < 1 \end{cases} \quad (7)$$

Na Eq. (7), s corresponde a semi-amplitude, em cm, da escala de valores usados nas comparações. Por exemplo, se os valores da escala ($1/9$, 9) fossem distribuídos em uma escala de 15cm de forma equidistante, $s = 7,5$ cm. Na seqüência, calcula-se a média dos M valores resultantes de z , a qual é convertida em um ponto de centro \bar{a}_{mn} usando a equação:

$$\bar{a}_{mn} = \begin{cases} 1 + (8z/s) & z \geq 0 \\ [1 - (8z/s)]^{-1} & z < 0 \end{cases} \quad (8)$$

Os pontos de centro \bar{a}_{mn} a serem determinados limitam-se àqueles para os quais $n > m$. Uma vez disponíveis tais pontos, deve-se organizá-los na diagonal superior de uma matriz de pontos de centro $\bar{\mathbf{A}}_{le}^k$. Os elementos na diagonal de $\bar{\mathbf{A}}_{le}^k$ têm valor 1; elementos i abaixo da diagonal principal devem ser recíprocos (isto é, $1/i$) dos elementos acima da diagonal. Na matriz $\bar{\mathbf{A}}_{le}^k$, os pontos de centro foram obtidos a partir das comparações feitas pelo analista k quando o elemento e no nível l é utilizado como critério de comparação de elementos em um nível inferior diretamente conectado a l . O cálculo do autovetor e autovalor principal de $\bar{\mathbf{A}}_{le}^k$, bem como de seu índice de consistência, utiliza as expressões apresentadas na seção 2.

Os valores de *RI* na Tabela 1 podem ser utilizados no caso de coleta completa de dados nas matrizes de comparações. No caso de coleta parcial de dados, o valor de *RI* vai

dependem do valor de M , isto é, do subconjunto de comparações efetivamente realizadas do total de comparações possíveis. De maneira geral, RI decresce à medida que M se aproxima de 1, quando não é mais possível proceder com a verificação de consistência.

Os índices aleatórios de consistência na Tabela 5 foram obtidos através de um estudo de simulação, onde matrizes de comparação foram construídas com valores de julgamento a_{mn} aleatoriamente amostrados no intervalo entre $1/i$ e i , onde i assumiu qualquer valor entre 1 e 9, até duas casas decimais. Para obtenção dos índices, utilizou-se a seqüência de passos descrita a seguir.

Passo 1: Geração de matrizes incompletas

Foram geradas 500 matrizes para cada combinação de D e M , onde D ($D=1,2,\dots,10$) é a ordem da matriz e M ($M=2,\dots,9$) o número de linhas preenchidas. Para uma dada matriz, M linhas de avaliações, isto é, com valores aleatórios de a_{mn} , encontram-se disponíveis; as demais linhas da matriz são obtidas a partir das relações na eq. (4). As matrizes foram construídas em planilha eletrônica e os números aleatórios obtidos por programação em VBA. Os valores aleatórios a_{mn} foram registrados em M matrizes separadas, cada qual com uma única linha preenchida por estes valores, conforme exemplificado na Figura 3 para o caso de duas matrizes de ordem 3×3 . As linhas não realçadas nas matrizes M_1 e M_2 foram obtidas utilizando as relações na eq. (4).

Passo 2: Cálculo dos pontos de centro

Foram calculados os pontos de centro dos M resultados disponíveis para cada célula (m, n) nas matrizes geradas no Passo 1. Primeiramente, os valores a_{mn} foram transformados em valores z utilizando a eq. (7), onde $s = 7,5$. A Figura 4(a) e 4(b) apresenta os valores de z obtidos a partir das matrizes M_1 e M_2 da Figura 3. A média dos valores de z resultantes foi calculada, conforme apresentado na Figura 4(c), e convertida em ponto de centro \bar{a}_{mn} usando a eq. (8), gerando uma matriz de pontos de centro \bar{A} [Figura 4(d)]. Na seqüência, foram calculadas 500 matrizes de pontos de centro \bar{A} de ordem D ($D = 1,2,\dots,10$).

M_1			M_2		
1	4,48	0,23	1	1,923	0,846
$1/4,48$	1	0,051	0,52	1	0,44
$1/0,23$	19,48	1	1,182	2,273	1

Figura 3: Duas matrizes de comparações incompletas, onde $D = 3$ e $M = 1$

Valores de $z - M_1$	Valores de $z - M_2$	Médias de z	\bar{A}
0	0,86	0	1
3,26	-0,17	2,06	3,20
-3,26	-1,19	-2,06	0,31
0	0	0	1
3,14	0	1,66	2,76
17,32	0	9,26	10,88
0	0	0	1

Figura 4: Obtenção da matriz de pontos de centro a partir das matrizes na Figura 3

Passo 3: Cálculo do autovetor e autovalor principal das matrizes

Os autovetores e autovalores principais das matrizes \bar{A} geradas no passo 2 foram obtidos utilizando a eq. (1). O autovetor principal da matriz na Figura 4 é $w' = [0,235 \ 0,069 \ 0,696]$ e seu autovalor máximo correspondente é $\lambda_{max} = 3,00$.

Passo 4: Cálculo do Índice de Consistência – CI

Para o cálculo dos CI s, utilizaram-se os resultados no Passo 3 e a eq. (2). Para a matriz de pontos de centro na Figura 4, $\lambda_{max} = 3,00$, ou seja, a matriz é perfeitamente

consistente já que $\lambda_{max} = D$, resultando em um valor de $CI = 0$. A média dos 500 valores de CI obtidos a partir das matrizes no Passo 2 representa o valor do índice aleatório de consistência (RI) para diferentes valores de D e M , conforme apresentado na Tabela 5. Pode-se notar que os valores na tabela apresentam pequenas inconsistências inerentes ao processo de simulação. Por exemplo, analisando a última linha é possível observar que os valores não apresentam crescimento sistemático à medida que o valor de M aumenta, como seria esperado. Outras inconsistências similares podem ser observadas analisando linhas e colunas da tabela.

Tabela 5: Valores de índice aleatório de consistência (RI) para matrizes incompletas de ordem $D = 3, \dots, 10$ com valores a_{mn} selecionados a partir de escala contínua

$D \backslash M$	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0,029							
4	0,0476	0,0698						
5	0,0662	0,1029	0,1149					
6	0,0807	0,1233	0,128	0,1324				
7	0,0869	0,1255	0,1474	0,148	0,1605			
8	0,0989	0,145	0,1597	0,166	0,1568	0,1621		
9	0,1049	0,1457	0,1664	0,1679	0,1702	0,1644	0,1641	
10	0,1091	0,153	0,1749	0,172	0,1693	0,1854	0,1695	0,1657

Para contornar tais inconsistências, ajustou-se o seguinte meta-modelo aos valores da Tabela 5 (RI' designa o valor ajustado de RI , decorrente da utilização do meta-modelo):

$$RI' = -0,163 + (0,137D)^{0,308} + (0,046M)^{0,2} \quad (9)$$

A Tabela 6 traz os valores de RI ajustados, obtidos utilizando a eq. (9).

Tabela 6. Valores ajustados de índice aleatório de consistência (RI') para matrizes incompletas de ordem $D = 3, \dots, 10$ com valores a_{mn} selecionados a partir de escala contínua

$D \backslash M$	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0,0294							
4	0,0473	0,0931						
5	0,0623	0,1081	0,1149					
6	0,0753	0,1211	0,128	0,1324				
7	0,0869	0,1327	0,1396	0,144	0,1474			
8	0,0974	0,1433	0,1501	0,1545	0,1579	0,1607		
9	0,1070	0,1529	0,1597	0,1642	0,1675	0,1703	0,1726	
10	0,1160	0,1618	0,1686	0,1731	0,1765	0,1792	0,1816	0,1836

4. Estudo de caso: otimização do processo de desenvolvimento de uma barra de chocolate

Neste estudo de caso, o método AHP foi utilizado na otimização do processo de desenvolvimento de uma barra de chocolate. No momento do estudo, o produto encontrava-se na fase de avaliação de protótipos, na qual são realizados testes sensoriais. A proposta era a utilização de matérias primas e ingredientes já disponíveis na empresa para produção de uma barra de chocolate do tipo Napolitano. A barra deveria ter três camadas de igual espessura e diferentes sabores: chocolate preto, recheio de sabor morango e chocolate branco.

Em avaliação técnica preliminar realizada na empresa, a barra de chocolate protótipo foi considerada enjoativa em relação à doçura. Assim, concebeu-se um painel sensorial onde o atributo a ser analisado na avaliação de novos protótipos seria o quanto enjoativo em relação à

doçura eram os protótipos. O objetivo do estudo era determinar o percentual de ingredientes (chocolate meio-amargo, chocolate branco e recheio sabor de morango) a ser utilizado na formulação da barra de chocolate de forma a elaborar um produto não enjoativo.

Foram produzidos quatro protótipos em escala de laboratório, no setor de P&D, com características semelhantes à barra que seria produzida em escala industrial. As barras de chocolate de 100g foram moldadas em formas, com quantidade de chocolate branco igual em todos os protótipos. A variação ocorria na quantidade de recheio de morango, que variava na faixa de 33 a 36%, e de chocolate meio-amargo, que tinha sua quantidade ajustada de acordo com o recheio. Para a avaliação destes protótipos, foram consideradas variáveis usuais de resposta, além do atributo avaliado em painel sensorial.

Os testes sensoriais foram realizados em um Laboratório de Análise Sensorial universitário e na sala de apoio do setor de desenvolvimento de produtos da empresa de chocolates. O laboratório universitário é equipado com cabines individuais; a sala de apoio da empresa de chocolates conta com mesas individuais separadas de maneira que a interação entre os julgadores não é possível. Esses locais apresentam ambiente calmo e livre de odores. Os julgadores foram recrutados dentre estudantes, pesquisadores e colaboradores do Laboratório de Análise Sensorial universitário e do quadro de colaboradores da empresa de alimentos. Quarenta e sete julgadores realizaram os testes sensoriais.

Na preparação das amostras, as barras de chocolate de 100g foram cortadas em quatro pedaços de 25g com auxílio de faca de aço inoxidável. As amostras foram apresentadas simultaneamente aos julgadores em recipientes brancos de material inerte e inodoro. Foram apresentadas simultaneamente, por seção, três amostras codificadas com números de três algarismos (ordem completamente aleatória), mais uma amostra de controle ou referência identificada. Um copo de água foi entregue a cada julgador para ser utilizado na realização do teste. A ordem de apresentação foi balanceada e aleatorizada, de modo que todas as amostras apareceram um mesmo número de vezes em uma determinada posição, porém em ordem aleatória para cada julgador.

Antes de cada seção, os julgadores receberam as instruções necessárias para realizar o teste e esclareceram suas dúvidas. Os julgadores foram instruídos quanto ao uso da ficha e aos objetivos do teste. Também foram instruídos a beber água antes de iniciar o teste, entre cada amostra e ao final do teste. Foram dadas instruções quanto à maneira de provar as amostras: a amostra de controle foi provada no início dos testes e entre uma amostra e outra. A ordem de prova de amostras foi da esquerda para a direita.

O teste sensorial, para verificar o quanto enjoativas em relação à doçura são as amostras em comparação à amostra de controle, foi realizado segundo o método de Comparação Indireta aos Pares proposto por Fogliatto e Albin (2001, 2003), que se fundamenta no AHP. Para a coleta de dados, optou-se pelo procedimento apresentado na seção 3, de maneira a reduzir a fadiga sensorial imposta aos julgadores. Assim, ao invés de solicitar 6 comparações pareadas aos avaliadores em um único teste, solicitou-se 3 comparações pareadas em dois testes (totalizando as mesmas 6 comparações, mas diminuindo a fadiga dos avaliadores devido a realização de dois testes).

Cada julgador realizou duas seções de teste com diferentes amostras de controle. Os testes foram realizados em dias diferentes, porém no mesmo horário do dia. Em cada seção de teste, julgadores preencheram uma escala de avaliação impressa na ficha. As marcas nas escalas associadas a cada teste foram convertidas em valores numéricos entre 1/9 e 9. Na avaliação de quanto enjoativa são as amostras em relação à amostra de controle, o valor 1/9 corresponde à uma amostra muito mais enjoativa do que a amostra de controle, 9 corresponde à uma amostra muito menos enjoativa, e 1 é atribuído quando a amostra apresentar a mesma intensidade da amostra de controle. Estes valores foram registrados em uma matriz com uma única linha com números, na qual o rótulo da linha corresponde à amostra de controle. Com isso, cada julgador gerou duas matrizes com uma única linha com números, as quais posteriormente foram completadas com as expressões da equação (4).

As matrizes de julgamentos dos provadores \bar{A}_{kp} , obtidas a partir dos resultados das

avaliações, foram utilizadas para o cálculo do vetor de pesos, com valores correspondentes à intensidade das amostras percebidas pelo julgador k . O maior valor no vetor de pesos corresponde à amostra menos enjoativa em relação à doçura. A matriz \bar{A}_{kp} também possibilitou a determinação de uma medida de consistência (CI) para o julgador.

O valor de CI foi comparado com um índice aleatório de consistência (RI) de uma matriz (4×4) em que 2 linhas são preenchidas (ver Tabela 6). A consistência da matriz de julgamento dos julgadores foi medida através da razão de consistência CR, cujo valor tabelado é 0,22. O julgador com a maior razão de consistência CR foi de 19,06, isto é, uma consistência muito baixa. O valor mínimo de CR foi de 0,00, indicando perfeita consistência do julgador em questão. A Tabela 7 apresenta o desempenho dos 47 julgadores. Pode-se observar que 18 julgadores obtiveram valores de razão de consistência baixos, demonstrando uma boa capacidade de avaliação do atributo.

Tabela 7. Desempenho dos julgadores

CR	Nº de julgadores
0,00 – 0,49	18
0,50 – 1,00	10
1,01 – 4,00	9
4,01 – 19,06	10

Para a otimização do produto, foi gerado um vetor de pesos finais para as amostras, em que foram considerados todos os julgadores ponderados por uma função de sua razão de consistência, conforme apresentado na equação (10).

$$\mathbf{w}_p = \sum_{k=1}^K \frac{1/CR_k}{\sum_{k=1}^K 1/CR_k} \times \mathbf{w}_{kp} \quad (10)$$

O vetor de pesos final para as quatro amostras analisadas está apresentado na Figura 5. No vetor, identifica-se a amostra número 2 como a menos enjoativa.

\mathbf{w}_p
0,28
0,49
0,12
0,11

Figura 5: Vetor de pesos finais

Em uma segunda etapa da otimização, foi desenvolvido um modelo de regressão que relacionava os pesos finais de cada amostra (encontrados no vetor final de cada julgador) com a quantidade de recheio sabor morango (I), variável dentro da faixa de 33 a 36%. O modelo obtido pela regressão múltipla vem apresentado na eq. (11). O coeficiente de determinação do modelo na equação (11) foi $R^2 = 0,606$.

$$\text{Peso da amostra} = -6443,46 + 559,178I - 16,1629I^2 + 0,155613I^3 \quad (11)$$

Para encontrar o valor ótimo de recheio que maximizava o peso da amostra, utilizou-se um aplicativo de otimização não-linear. A equação (11) foi utilizada como função objetivo em um problema de maximização, restrito a região experimental da variável I (isto é, entre 33 a 36% de variação). No ponto ótimo (correspondendo a um valor de preferência de 0,53 para a função objetivo), o valor assumido por I foi de 33,7%. Porém, a precisão do processo industrial não permitiu a utilização desta porcentagem exata de recheio. Sendo assim, a quantidade ótima de recheio de morango na barra de chocolate foi estabelecida como 34%, uma vez que este é o

valor mais próximo do ideal.

O ponto ótimo da otimização indica como ideal uma barra de chocolate com composição intermediária entre as amostras 1 e 2 (mais próxima dessa última). Grafando-se a função objetivo como função da variável I , observa-se a não-linearidade da função e seu ponto de máximo em $w = 0,53$; ver Figura 6. A composição final do produto analisado foi a seguinte: 37% de chocolate meio-amargo, 34% de recheio sabor morango e 29% de chocolate branco.

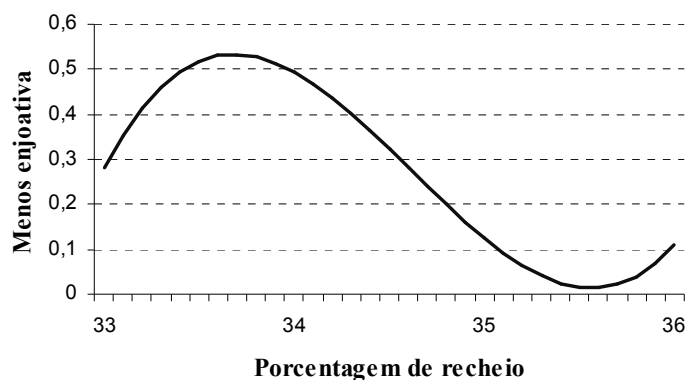


Figura 6: Valores de preferência em função do percentual de recheio

5. Conclusões

O Processo Analítico Hierárquico (AHP) é uma ferramenta de apoio à tomada de decisão multi-critério utilizada em praticamente todas as aplicações relacionadas à tomada de decisão. O AHP congrega uma coleta de dados baseada em comparações pareadas de elementos e uma análise de dados baseada em princípios de Álgebra Linear. O AHP permite uma análise da consistência interna dos dados utilizados no processo decisório, sendo esta uma de suas principais características.

Este artigo apresenta uma proposta de otimização para a etapa de coleta de dados do AHP. A proposta está baseada na utilização de matrizes incompletas de comparações, onde nem todos os pares de elementos da matriz são comparados entre si. A partir de um conjunto de matrizes incompletas, gera-se uma matriz de pontos de centro, a qual é utilizada no cálculo dos vetores de pesos e índice de consistência associados às comparações.

Como contribuições adicionais, o artigo apresenta uma validação dos índices aleatórios de consistência (RI s) obtidos por Saaty (1980), além da geração de tabelas de RI s para casos em que (i) as avaliações na matriz de comparações tenham sido feitas utilizando uma escala *quasi*-contínua de valores e (ii) matrizes incompletas de comparações são utilizadas.

O método proposto é exemplificado em um estudo de caso ocorrido na indústria de chocolates. O caso aborda a determinação dos percentuais de ingredientes a serem utilizados na formulação de uma barra de chocolate. O objetivo principal era obter um produto pouco enjoativo com relação à doçura. Tal objetivo foi atingido com sucesso a partir de painéis sensoriais onde um número reduzido de comparações era solicitado, reduzindo a fadiga imposta aos avaliadores.

A barra de chocolate Napolitano foi lançada em agosto de 2005, com grande aceitação pelo mercado. Nos últimos meses de 2006, o produto esteve entre os 5 itens mais vendidos da empresa, sendo que em outubro de 2006 bateu o seu recorde de vendas. A barra foi a vencedora do “Prêmio de Produto Alimentício Mais Inovador da América do Sul”, conhecido como o “Oscar” da indústria de alimentos, promovido pela Food Ingredients South America (FISA), em 2006, na sua 12ª edição.

Referências Bibliográficas

(1) Babic, Z. & Plazibat, N. (1998). Ranking of enterprises based on multi-criteria analysis. *International Journal of Production Economics*, **56-57 (1-3)**, 29-35.

- (2) Bana e Costa, C. A. & Vansnick, J. C. (2008). A critical analysis of the eigenvalue method used to derive priorities in AHP. *European Journal of Operational Research*, **187**, 1422-1428.
- (3) Barzilai, J. & Golany, B. (1994). AHP rank reversal, normalization and aggregation rules. *INFOR*, **32 (2)**, 57-64
- (4) Barzilai, J. (1997). Deriving weights from pairwise comparison matrices. *J. Operational Research Society*, **48 (12)**, 1226-1232.
- (5) Barzilai, J. (1998). Understanding hierarchical processes. **In:** *Proc. 19th American Society for Engineering Management*, 1-6.
- (6) Barzilai, J. (1999). On MAUT, AHP, and PFM. **In:** *Proc. 5th. Int. Symposium on the AHP*, 57-60.
- (7) Barzilai, J. (2000). Theory of measurement for voltage and affine variables. **In:** *Proc. IEEE Int. Conf. Systems, Man and Cybernetics*, 636-640.
- (8) Barzilai, J. (2001). Notes on the Analytic Hierarchy Process. **In:** *Proc. NSF Design and Manufacturing Research Conference*, 1-6.
- (9) Barzilai, J.; Cook, W. & Golany, B. (1987). Consistent weights for judgments in matrices of relative importance of alternatives. *Operations Research Letters*, **6 (3)**, 131-134.
- (10) Belton V. & Gear T. (1982). On a shortcoming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies. *Omega*, **11**, 228-230.
- (11) Belton, V. & Steward, T. (2002). On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies. *Omega*, **11(3)**, 228-230.
- (12) Cagno, E.; Caron, F. & Perego, A. (2001). Multi-criteria assessment of the probability of winning in competitive bidding process. *International Journal of Production Management*, **19**, 313-324.
- (13) Crawford, G. & Williams, C. (1985). A note on the analysis of subjective judgment matrices. *J. Mathematical Psychology*, **29**, 387-405.
- (14) Dyer, J.S. (1990). Remarks on the Analytic Hierarchy Process. *Management Science*, **36(3)**, 249-258.
- (15) Fogliatto, F. S. & Albin, S.L. (2001). A hierarchical method for evaluating products with quantitative and sensory characteristics. *IIE Transactions*, **33**, 1081-1092.
- (16) Fogliatto, F. S. & Albin, S.L. (2003). An AHP-based procedure for sensory data collection and analysis in quality and reability applications. *Food Quality & Preference*, **14**, 375-385.
- (17) Forman, E. & Gass, S. (2001). The Analytic Hierarchy Process- An Exposition. *Operations Research*, **49 (4)**, 469-486.
- (18) Forman, E. (1993). Facts and fictions about the AHP. *Math. Comput. Modelling*, **17 (4/5)**, 19-26.
- (19) Guglielmetti, F.; Marins, F. & Salomon, V. (2005). Comparação teórica entre métodos de auxílio à tomada de decisão por múltiplos critérios. **In:** *Encontro Nacional de Engenharia de*

Produção, **23**, Anais.

(20) Hua, Z.; Gong, B. & Xu, X. (2008). A DS-AHP approach for multi-attribute decision making problem with incomplete information. *Expert Systems with Applications*, **34**, 2221-2227.

(21) Koksall, G. & Egitman, A. (1998). Planning and design of industrial engineering education quality. *Computers & Industrial Engineering*, **35 (3-4)**, 639-642.

(22) Myint, S. (2003). A framework of intelligent quality function deployment (QFD) for discrete assembly environment. *Computers & Industrial Engineering*, **45 (2)**, 269-283.

(23) Saaty, T. L. & Vargas, L. G. (1987). Uncertainty and Rank Order in the Analytic Hierarchy Process. *European Journal of Operational Research*, **32**, 107-117.

(24) Saaty, T. L. (1977). A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures. *Journal of Math. Psychology*, **15**, 234-281.

(25) Saaty, T. L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, New York.

(26) Saaty, T. L. (1986). Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process. *Management Science*, **32**, 841-855.

(27) Saaty, T.L., (1990). An exposition of the AHP in reply to the paper remarks on the analytic hierarchy process. *Management Science*, **36**, 259-268.

(28) Schenkerman, S. (1991). The cause of rank reversal in weighted criteria decision support models. **In:** *Proc. 20th Annual Northeast Conference of the Decision Sciences Institute*.

(29) Schenkerman, S. (1994). Avoiding rank reversal in AHP decision-support models. *European J. Operational Research*, **74**, 407-469.

(30) Schoner, B. & Wedley, W. (1989). Ambiguous criteria weights in AHP: consequences and solutions. *Decision Sciences*, **20**, 462-474.

(31) Smith, J. R. & von Winterfeldt, D. (2004). Decision analysis in Management Science. *Management Science*, **50(5)**, 561-574.

(32) Steiguer, J.; Duberstein, J. & Lopes, V. (2005) *The Analytic Hierarchy Process as a Means for Integrated Watershed Management*. Disponível em:
<<http://www.tucson.ars.ag.gov/icrw/Proceedings/Steiguer.pdf>>

(33) Stewart, T. (1992). A critical survey on the status of multiple criteria decision making theory and practice. *Omega*, **20 (5/6)**, 569-586.

(34) Tummala, V.R.M. & Wan, Y.M. (1994). Analytic Hierarchy Process (AHP) in practice: a survey of applications and recent developments. *Journal of Mathematical Modelling and Scientific Computing*, **3 (1)**, 1-38.

(35) Vaidya, O.S. & Kumar, S. (2006). Analytic hierarchy process: An overview of applications. *European Journal of Operational Research*, **169 (1)**, 1-29.

(36) Vargas, L. G. (1982). Reciprocal matrices with random coefficients. *Mathematical Modelling*, **3**, 69-81.

- (37) Vargas, L. G. (1990). An overview of analytic hierarchy process: Its applications. *European Journal of Operational Research*, **48 (1)**, 2-8.
- (38) Wang Y.M. & Elhag T. M.S. (2006). An approach to avoiding rank reversal in AHP. *Decision Support Systems*, **42(3)**, 1474–80.
- (39) Zahedi, F. (1984). *Estimation Techniques and their Statistical Properties in the Analytic Hierarchy Process*. University of Massachusetts Working Paper.
- (40) Zahedi, F. (1986). The Analytic hierarchy process: A survey of methods and its applications. *Interfaces*, **16 (4)**, 96-108.