Função de preferência Total C_{pm}

Funções objetivo alternativas para otimização de experimentos com múltiplas respostas

Flávio Fogliatto

Projeto de Experimentos II

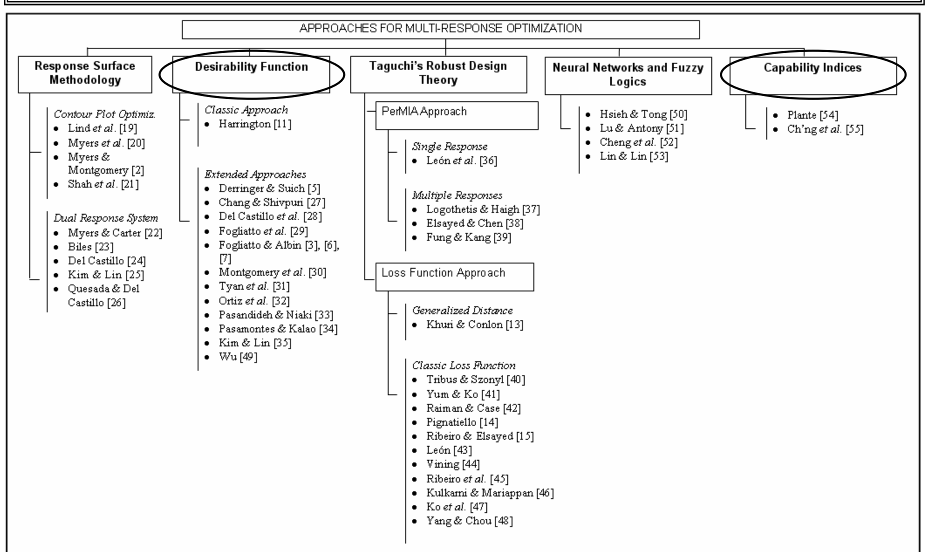
1

Otimização Multiresposta Procedimento padrão

1. Respostas modeladas como função dos fatores controláveis do experimento
2. Medidas de desempenho preditas são obtidas usando modelos de regressão para as respostas:
   - Distância-ao-alvo, variância, robusteza
3. Medidas de desempenho são combinadas sobre todas as respostas usando alguma função de utilidade:
   - Função de perda de Taguchi, função de preferência, Total C_{pm}
4. Função de utilidade é otimizada na região experimental:
   - Melhor ajuste dos fatores de controle é determinado

2

Abordagens para otimização multiresposta



3

Notação

- Fatores de controle: x_1, x_2, x_3,…
- Tratamentos experimentais: t = 1,…, T
- Variáveis de resposta *(i)*: Y_1, Y_2, …, Y_p
- Respostas preditas:

$$\hat{Y}_1 = f_1(\mathbf{x}),\ \hat{Y}_2 = f_2(\mathbf{x}),\ldots$$

4

Função de Preferência

- Proposta por Derringer & Suich (1980) e adaptada do trabalho de Harrington (1965)
- Função de preferência converte valores das variáveis de resposta em números no intervalo [0,1]:
  - 1 indica o valor mais desejável (ou seja, mais próximo do valor-alvo)
  - 0 indica um valor de resposta inaceitável

Seja $\hat{d}_{it}$ o valor de preferência associado à predição $\hat{Y}_{it}$, *i* = 1,...,*P*, *t* = 1,...,*T*

Valores que definem a inclinação da função de preferência em torno do valor-alvo τ_i

$$\hat{d}_{it} = \left(\frac{\hat{Y}_{it} - Y_i^L}{\tau_i - Y_i^L}\right)^{v} . I_{\left[Y_i^L, \tau_i\right]}(\hat{Y}_{it}) + \left(\frac{\hat{Y}_{it} - Y_i^U}{\tau_i - Y_i^U}\right)^{z} . I_{\left(\tau_i, Y_i^U\right]}(\hat{Y}_{it})$$

Limites operacionais (ou limites de especificação) inferior e superior da *i-ésima* variável de resposta

Função indicadora, dada por: $I_{[a,b)} = \begin{cases} 1, & se\ a \le \hat{Y}_{it} < b; \\ 0, & caso\ contrario. \end{cases}$

Casos onde Alvo = 0 ou Alvo = ∝

$$\hat{d}_{it} = \left(\frac{\hat{Y}_{it} - Y_i^U}{Y_i^L - Y_i^U}\right)^{v} . I_{(Y_i^L, Y_i^U)}(\hat{Y}_{it}) + I_{[0, Y_i^L]}(\hat{Y}_{it})$$

$\tau = 0$

$$\hat{d}_{it} = \left(\frac{\hat{Y}_{it} - Y_i^L}{Y_i^U - Y_i^L}\right)^{v} . I_{(Y_i^L, Y_i^U)}(\hat{Y}_{it}) + I_{[Y_i^U, \infty)}(\hat{Y}_{it})$$

$\tau = \infty$

Interpretação dos limites operacionais quando Alvo = 0

- Quando $\tau = 0$:
  - Y_i^L correponde a um valor limite a partir do qual qualquer valor menor observado para a *i-ésima* resposta é igualmente desejável, sendo atribuído um valor de preferência igual a 1
  - Y_i^U continua sendo interpretado como limite operacional superior da variável de resposta

Interpretação dos limites operacionais quando Alvo = ∞

- Quando $\tau = \propto$, a interpretação é a oposta:
  - Y_i^U corresponde a um valor limite a partir do qual qualquer valor maior observado para a *iésima* resposta é igualmente desejável
  - Y_i^L continua sendo interpretado como limite operacional inferior da variável de resposta

Obtenha os valores preditos de preferência para os seguintes dados experimentais

		Fatores de Controle		Variáveis	de Resposta
Trtm.	*Temperatura*	*Espaçamento*	*Velocidade*	*Unidade*	*Gordura*
1	-1	-1	-1	39,747	37,226
2	+1	-1	-1	29,622	36,167
3	-1	+1	-1	35,630	42,840
4	+1	+1	-1	34,790	44,237
5	-1	-1	+1	41,109	38,458
6	+1	-1	+1	29,345	33,600
7	-1	+1	+1	36,947	46,254
8	+1	+1	+1	35,017	47,021
Limite Operacional Superior				44,0	48,0
Valor-Alvo				33,0	43,0
Limite Operacional Inferior				23,0	32,0

Considere *v* e *z* como unitários

Valores de preferência para múltiplas respostas são combinados na otimização multireposta

$$D_t = \left(\prod_{p=1}^{P} d_{pt} \right)^{1/p}, \ t = 1, \ldots, T.$$

Todas as respostas são igualmente ponderadas em importância

$$D_t = d_{1t}^{w_1} \times \ldots \times d_{pt}^{w_p}$$

Respostas apresentam diferentes pesos de importância
$\Sigma w = 1$

Otimizando o exemplo anterior

- Considere as duas variáveis de resposta do exempo anterior como igualmente ponderadas em importância
- Determine o ajuste ótimo para os fatores de controle tal que as variáveis de resposta estejam o mais próximas possíveis dos alvos

Minimizando a sensibilidade das respostas a variações nos fatores controláveis

- Suposição principal na predição da sensibilidade de uma variável de resposta é que os fatores de controle, x_c , c = 1,…,C, são variáveis aleatórias
- A sensibilidade predita para a variável de resposta i no tratamento t é dada por (Oh, 1988):

$$\hat{S}_{it} = \sum_{c=1}^{C} V(x_c).\left[\frac{\partial \hat{Y}_i}{\partial x_c}(t)\right]^2 + \sum_{c=1}^{C}\sum_{g=1}^{C} Cov(x_c x_g).\left[\frac{\partial \hat{Y}_i}{\partial x_c}(t).\frac{\partial \hat{Y}_i}{\partial x_g}(t)\right]$$

  – $V(x_c)$ é a variância associada ao fator de controle c, e $Cov(x_c x_g)$ é a covariância associada aos fatores de controle c e g, $c \neq g$

Interpretação da equação da sensibilidade

– Os termos de variância e covariância na equação são constantes que funcionam como pesos para as derivadas:

- Tais termos podem ser estimados monitorando os processos de interesse utilizando cartas de controle estatístico ou a partir da opinião de técnicos experientes, conhecedores do processo
- Como eles atuam como pesos na equação, não é necessário saber seus valores exatos
- A expressão para a sensibilidade representa a porção da variância associada à resposta causada por variação nos fatores de controle

$$\hat{S}_{it} = \sum_{c=1}^{C} V(x_c).\left[\frac{\partial \hat{Y}_i}{\partial x_c}(t)\right]^2 + \sum_{c=1}^{C}\sum_{g=1}^{C} Cov(x_c x_g).\left[\frac{\partial \hat{Y}_i}{\partial x_c}(t).\frac{\partial \hat{Y}_i}{\partial x_g}(t)\right]$$

Minimizando a variância das variáveis de resposta

- Supõem-se experimentos com tratamentos replicados:
  – Nestes casos, estima-se a variância amostral para cada variável de resposta em cada tratamento, e
  – Modela-se a variância amostral como função dos fatores de controle do experimento:
    - Caso nenhum modelo seja obtido, a variância deve ser considerada uniforme ao longo dos tratamentos

Incorporando minimizar sensibilidade e variância na função de preferência

- Para uma predição $\hat{P}_{it}$ com valor-alvo τ_i = 0 (como nos casos da variância e sensibilidade):
  – o limite superior P_i^U é selecionado tal que valores maiores ou iguais a este limite são inaceitáveis, tendo preferência igual a 0
  – o limite inferior P_i^L, por sua vez, é selecionado tal que valores menores ou iguais a ao limite são igualmente desejáveis, recebendo valores de preferência igual a 1. A expressão de preferência para esse caso é:

$$\hat{d}_{it} = \left(\frac{\hat{P}_{it} - P_i^U}{P_i^L - P_i^U}\right) .I_{(P_i^L, P_i^U)}(\hat{P}_{it}) + I_{[0, P_i^L]}(\hat{P}_{it})$$

Otimize o experimento abaixo com relação a distância-ao-alvo, sensibilidade e variância

	Fatores de controle			Variáveis de resposta	
t	*Temp*	*Afast.*	*Veloc.*	*Umidade* (*i*=1)	*Gordura* (*i*=2)
1	-1	-1	-1	39,747, 40,692, 39,761, 39,883	37,226, 37,951, 36,912, 37,686
2	+1	-1	-1	29,622, 30,257, 30,588, 30,180	36,167, 36,565, 37,932, 37,015
3	-1	+1	-1	35,630, 35,658, 35,381, 36,066	42,840, 42,566, 42,364, 42,924
4	+1	+1	-1	34,790, 34,191, 34,323, 34,108	44,237, 43,926, 43,271, 42,977
5	-1	-1	+1	41,109, 42,842, 36,654, 43,503	38,458, 38,946, 34,694, 38,282
6	+1	-1	+1	29,345, 32,837, 24,223, 28,720	33,600, 38,636, 32,408, 37,084
7	-1	+1	+1	36,947, 37,608, 33,428, 33,133	46,254, 47,485, 46,363, 41,671
8	+1	+1	+1	35,017, 29,774, 34,911, 34,442	47,021, 37,978, 45,758, 46,889
Limite superior de variação para a resposta				44,00	48,00
Alvo da resposta				33,00	43,00
Limite inferior de variação para a resposta				23,00	32,00
Limite superior de variação para a variância				15,00	20,00
Limite inferior de variação para a variância				0,05	0,05
Limite superior de variação para a sensibilidade				10,00	10,00
Limite inferior de variação para a sensibilidade				0	0

Total C_{pm}

- Proposto por Ch´ng, Quah e Low (2005)
- Para um produto que tenha mais de uma resposta, é calculado o C_{pm} relacionado a cada uma destas medições
- Cada resultado é multiplicado por um fator de ponderação e_i, onde $_i$ indica a quantidade de respostas em avaliação

$$TotalCpm = \sum_{i=1}^{p} e_i \cdot \frac{\min(USL_i - T_i ; T_i - LSL_i)}{3\sqrt{\hat{w}_{i\sigma}^2 + (\hat{w}_{i\mu} - T_i)^2}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} e_i \cdot \frac{d_i - |m_i - T_i|}{3\sqrt{\hat{w}_{i\sigma}^2 + (\hat{w}_{i\mu} - T_i)^2}}$$

modelo de regressão estimado para a variância

modelo de regressão estimado para a média

Para os casos unilaterais

$$TotalCpmi = \sum_{i=1}^{p} e_i \cdot \frac{T_i - LSL_i}{3\sqrt{\hat{w}_{i\sigma}^2 + (\hat{w}_{i\mu} - T_i)^2}}$$

Para respostas do tipo maior-é-melhor

$$TotalCpms = \sum_{i=1}^{p} e_i \cdot \frac{USL_i - T_i}{3\sqrt{\hat{w}_{i\sigma}^2 + (\hat{w}_{i\mu} - T_i)^2}}$$

Para respostas do tipo maior-é-melhor

Exercício final

- Verifique o ponto ótimo do exercício anterior utilizando o índice *Total* C_{pm}