Capítulo 5 Confiabilidade de Sistemas Série-Paralelo e Mistos

Flávio S. Fogliatto

Roteiro da apresentação:

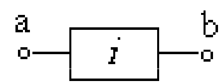
- ***Sistemas***:
  - Série
  - Paralelo
  - Combinações Paralelo-Série, Série-Paralelo
  - Sistemas *k*-em-*n*

Suposições comuns a todos os sistemas analisados

- Confiabilidade de sistemas é avaliada num ponto *t* no tempo; ou seja, componentes apresentam confiabilidades estáticas em *t*.
- Componentes dos sistemas apresentam-se em dois estados: *operantes* ou *não-operantes*.
- Componentes falham independentemente.

Sistemas representados por diagramas funcionais de blocos

- Diagrama descreve função do sistema; p/ sistemas c/ mais de uma função = mais de um diagrama.
- Componente representado por bloco:



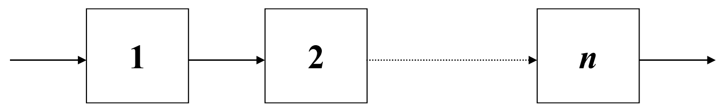
Notação

- E_i = evento do componente i estar operante no momento da verificação.
- $R_i = P(E_i)$ = confiabilidade do componente.
- R_S = confiabilidade do sistema.

Atenção: medidas avaliadas no tempo t de interesse para o analista.

1. Sistemas em Série

- Na prática, esta é a configuração mais comum.
- Num sistema em série, todos os componentes devem funcionar para que o sistema funcione.
- O diagrama de blocos p/ este sistema é:



A confiabilidade do sistema é:

$R_S = P[E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n]$

ou seja, o sistema funciona se todos os componentes funcionarem (por isso a intersecção de eventos).

Supondo independência entre falhas:

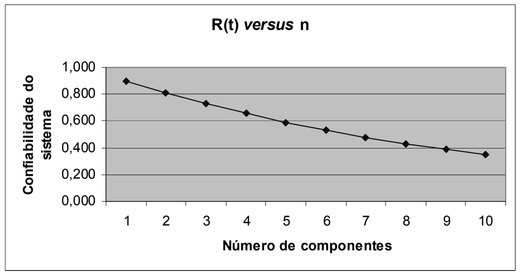
$$R_S = P(E_1) \times P(E_2) \times \ldots \times P(E_n)$$

ou

$$R_S = \prod_{i=1}^{n} R_i$$

Propriedades do arranjo em série

- Confiabilidade do sistema decresce rapidamente a medida que nº de componentes aumenta.



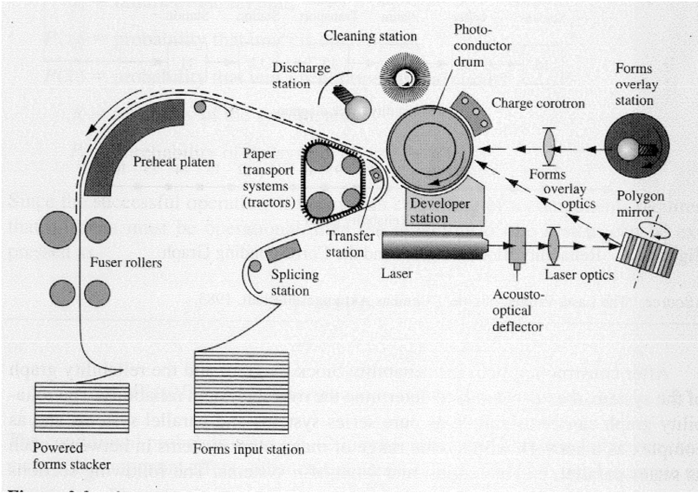
Exemplo:

Suponha componentes c/ $R = 0.9$ num determinado tempo.

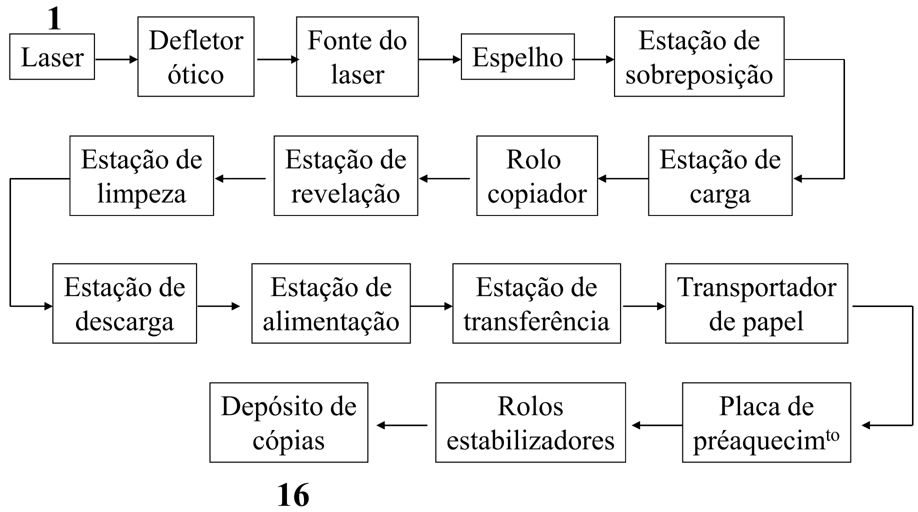
- Limite superior de R_s = confiabilidade do componente mais fraco; isto é:

$$R_S \leq \min_i \{R_i\}$$

Exemplo 1: impressora a laser



Impressora a laser
Diagrama de blocos



Impressora a laser
Confiabilidade dos componentes

Componente	*Confiabilidade*
1	0,8760
2	0,8200
3	0,9187
4	0,9789
5	0,9760
6	**0,9907**
7	**0,8029**
8	0,8811
9	0,9718
10	0,8276
11	0,8488
12	0,8090
13	0,8064
14	0,8327
15	0,8437
16	0,8034

A confiabilidade do sistema é:

$$R_S = \prod_{i=1}^{n} R_i$$

$$R_S = (0.8760 \times 0.8200 \times \ldots \times 0.8034)$$

$$R_S = 0.111$$

P/ obtermos uma confiabilidade de, digamos, 80% p/ o sistema:

$$R_S \approx 1 - n(1-R)$$

$$0.8 \approx 1 - 16(1-R)$$

$$R \approx 0.9875$$

Confiabilidade necessária p/ componentes.

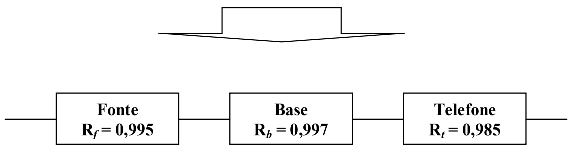
Exemplo 2: telefone sem fio

- Sistema em série composto por fonte, base e telefone.
- Componentes apresentam taxas de falha constantes:
  - Fonte: $\lambda_f = 5\ falhas/10^6 h$
  - Base: $\lambda_b = 3\ falhas/10^6 h$
  - Telefone: $\lambda_t = 15\ falhas/10^6 h$
- Determine confiabilidade p/ 1000 horas de uso.

Confiabilidade dos componentes:

$$R_f(1000) = e^{-\lambda_f t} = e^{-5\times10^{-6}(1000)} = 0.995 \qquad R_b(1000) = e^{-\lambda_b t} = e^{-3\times10^{-6}(1000)} = 0.997$$

$$R_t(1000) = e^{-\lambda_t t} = e^{-15\times10^{-6}(1000)} = 0.985$$



- Confiabilidade do sistema:

$$R_S(1000) = R_f \times R_b \times R_t = 0.977$$

Pausa para exercício

- Resolva os seguintes exercícios:

1) Em um sistema constituído por 30 componentes idênticos, qual deveria ser a confiabilidade necessária em cada um desses componentes para que se obtenha uma confiabilidade total de 92%?

2) Um sistema é composto por 11 componentes cuja confiabilidade é de 0,95 e por 4 componentes cuja confiabilidade é de 0,99. Sabendo que este sistema está em série, determine a confiabilidade total do sistema.

2. Sistemas em Paralelo

- Num sistema em paralelo, *todos* os componentes devem falhar p/ que o sistema falhe.
- *Expressão da Confiabilidade*:

$$Q_S = P\left[\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ldots \cap \overline{E}_n\right]$$

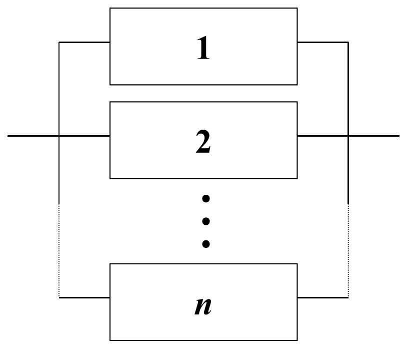
não-confiabilidade do sistema

$$Q_S = P(\overline{E}_1) \times P(\overline{E}_2) \times \ldots \times P(\overline{E}_n) = \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i)$$

$$R_S = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i)$$

Três tipos de arranjo em paralelo

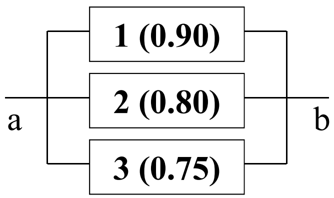
- **Paralelo puro** - componentes em operação simultânea; falhas não afetam desempenho dos componentes sobreviventes.



A expressão de confiabilidade apresentada anteriomente serve p/ este tipo de sistema.

Sistemas em paralelo puro
Exemplo

- Considere sistema c/ 3 componentes em paralelo:



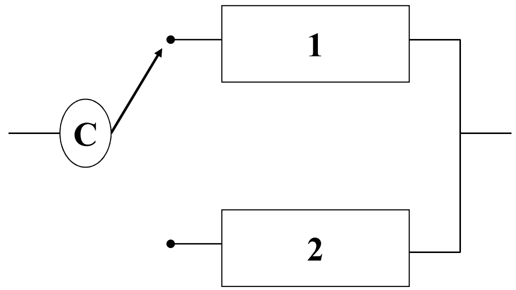
$$R_S = 1 - \prod_{i=1}^{3}(1 - R_i)$$

$$R_S = 1 - [(1-0.9)\times(1-0.8)\times(1-0.75)] = 0.995$$

- R_S é maior que a confiabilidade do melhor componente.
- Quando comp. apresentam somente dois modos de operação, R_S aumenta com o nº de componentes.

Três tipos de arranjo em paralelo (*Cont.*)
Paralelo com *standby*

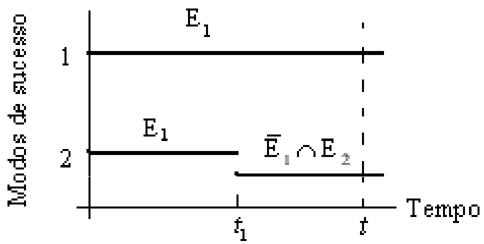
- Componente em *standby* somente é ativado quando componente ativo falhar.



Expressão de confiabilidade deste sistema no caso de chave de troca (C) perfeita dada a seguir.

Exemplo anterior c/ chave de troca perfeita

- T_i = tempo-até-falha do *i*-ésimo componente, c/ densidade $f_i(t)$.



$$R_S^2(t) = P\left[\left(T_1 > t\right) \cup \left(T_1 \le t \cap T_2 > t - T_1\right)\right]$$

Modos de sucesso não podem ocorrer simultaneamente

- Confiabilidade do sistema:

$$R_S^2(t) = R_1(t) + \int_0^t f_1(t_1) R_2(t - t_1)\, dt_1$$

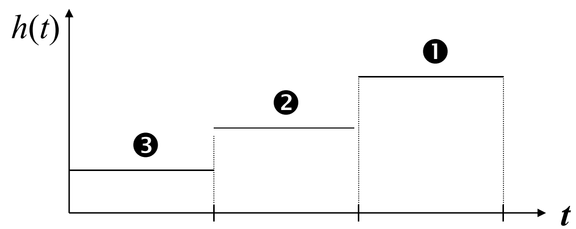
- No caso especial de componentes c/ taxa de falhas constante (=λ):

$$R_S^2(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$$

Três tipos de arranjo em paralelo (*Cont.*)

Paralelo compartilhado

- Componentes ativados simultaneamente.
- Falha em um dos componentes afeta as taxas de falha dos sobreviventes.
- Análise de sistemas compartilhados utiliza diagrama de estado do sistema:



Pausa para exercício

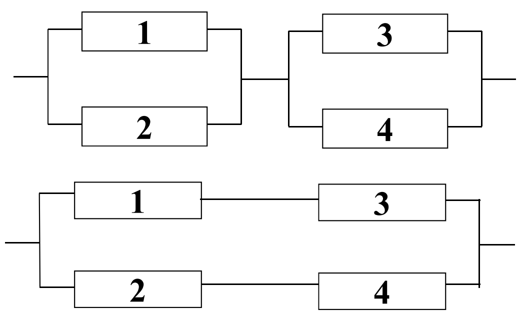
- Resolva os seguintes exercícios:

3) Calcule a confiabilidade de um sistema constituído por 5 componentes arranjados em paralelo cuja confiabilidade é 50%.

4) Imagine um sistema com 2 componentes com *standby* e taxa de falha constante igual a 0,0614. Qual a sua confiabilidade no tempo $t = 10$, sabendo-se que a chave de troca é livre de defeitos?

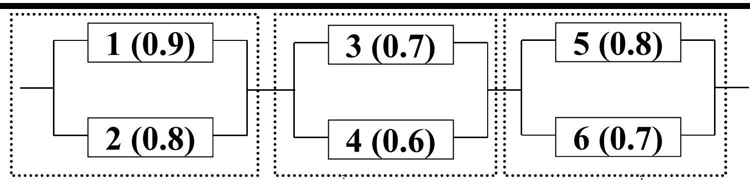
3. Combinações Paralelo-Série

- Dois exemplos:



- Análise feita decompondo sistemas em subsistemas em série e paralelo.

Exemplo: Série-Paralelo



- Decompor em 3 subsistemas em paralelo:

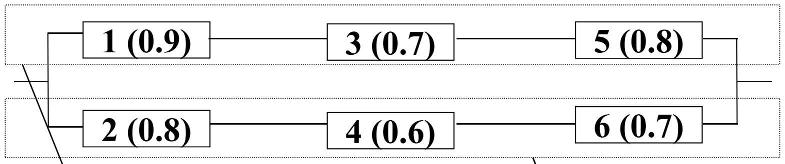
$$R_{SS_1} = 1 - [0.1 \times 0.2] = 0.98 \qquad R_{SS_3} = 1 - [0.2 \times 0.3] = 0.94$$

$$R_{SS_2} = 1 - [0.3 \times 0.4] = 0.88$$

- Tratar subsistemas como um sistema em série:

$$R_S = R_{SS_1} \times R_{SS_2} \times R_{SS_3} = 0.98 \times 0.88 \times 0.94 = 0.81$$

Exemplo: Paralelo-Série



- Decompor em 2 subsistemas em série:

$R_{SS_1} = 0.9 \times 0.7 \times 0.8 = 0.504$

$R_{SS_2} = 0.8 \times 0.6 \times 0.7 = 0.336$

- Tratar subsistemas como um sistema em paralelo:

$$R_S = 1 - [(1 - R_{SS_1})(1 - R_{SS_2}) = 0.67$$

Observações sobre combinações paralelo-série / série-paralelo

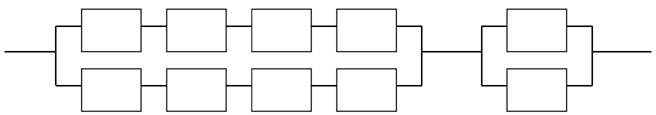
- **Série-paralelo** = redundância no nível do componente (de baixo nível).
- **Paralelo-série** = redundância no nível do sistema (de alto nível)
- Pode-se demonstrar, p/ sistemas c/ mesmos componentes:

  R(série-paralelo) $\geq$ R(paralelo-série)

- Diferença menos pronunciada em sistemas de componentes altamente confiáveis ($R > 0.9$).

Mais observações...

- Arranjos paralelo-série / série-paralelo podem apresentar-se combinados em arranjos mistos.
- Por exemplo:

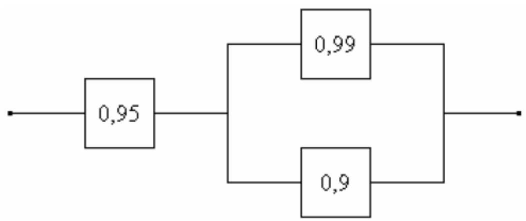


Pausa para exercícios

- Resolva os seguintes problemas:

5) Compare a confiabilidade de dois sistemas com 9 componentes, sendo (*a*) um paralelo-série (apresenta três subsistemas em paralelo, constituído de três componentes em série); e outro que (*b*) série-paralelo (apresenta três subsistemas em série, constituído de três componentes em paralelo). Considere que a confiabilidade seja 0,95 para todos os componentes do sistema.

6) Para o arranjo a seguir, calcule a confiabilidade:



4. Sistemas *k*-em-*n*

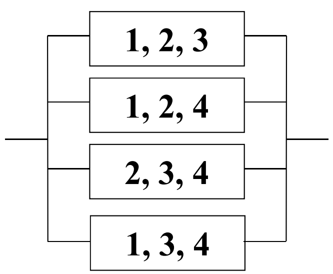
- Sistemas série e paralelo puro são casos especiais de sistemas *k*-em-*n*:
  - Série puro = sistema *n*-em-*n*
  - Paralelo puro = sistema 1-em-*n*
- No arranjo *k*-em-*n*, pelo menos *k* componentes devem estar operantes (de um total de *n* componentes) para que sistema opere satisfatoriamente.

Exemplos

- Centrais de geração de energia operam c/ dois ou três geradores, mas necessitam de um único operante para suprir demanda.
- Pontes suspensas e guindastes constituídos de cabos c/ milhares de fios de aço; somente uma fração dos fios garante a sustentação da carga.
- Carros c/ cinco pneus (um *step*) precisam de pelo menos quatro funcionando p/ poder funcionar.

Cálculo da confiabilidade a partir de um exemplo

- Sistema de comunicações c/ quatro canais, três dos quais devem estar operantes p/ que o sistema esteja operante.



Possíveis combinações de componentes que caracterizam um sistema operante.

Situação onde todos os compon. estão operantes {1,2,3,4} foi omitida.

Combinações expressas através do coeficiente binomial

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}}$$

No caso de componentes c/ confiabilidades idênticas e iguais a *R*, expressão de confiabilidade do sistema é:

$$R_S(k; n, R) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i}$$

Considere canais do ex. anterior c/ R = 0.65 (p/ missão de 2 anos)

- Sistema é do tipo 3-em-4, c/ confiabilidade dada por:

$$R_S = \sum_{i=3}^{4} \binom{4}{i} (0.65)^i (1-0.65)^{4-i}$$

$$R_S = 4(0.65)^3(1-0.65) + 1(0.65)^4(1-0.65)^0$$

$$R_S = 0.563$$

- Sistemas k-em-n costumam apresentar boa confiabilidade (já que oferecem algum grau de redundância).

Quando componentes diferentes, R_s envolve cálculo de probabilidades

- $R_S = P(\underbrace{E_1E_2E_3}_{A_1} + \underbrace{E_1E_2E_4}_{A_2} + \underbrace{E_1E_3E_4}_{A_3} + \underbrace{E_2E_3E_4}_{A_4})$

- Cancelamento de probabilidades torna inclusão de $A_5 = E_1E_2E_3E_4$ dispensável.

- $R_S = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)P(A_4) -$
  $P(A_1A_2) + \ldots + P(A_3A_4) + P(A_1A_2A_3) + \ldots + P(A_2A_3A_4) +$
  $P(A_1A_2A_3A_4)$

Pausa para exercícios

- Resolva os seguintes problemas:

12) Um sistema com cinco componentes em paralelo necessita que três deles estejam funcionando para que esteja operante. Sabendo que a confiabilidade dos componentes é 0,88, calcule a confiabilidade do sistema.

13) Imagine uma indústria que possui sete linhas produtivas. Para atender a sua demanda ela necessita que pelo menos cinco linhas estejam produzindo. Qual a probabilidade desta indústria não atender a sua demanda sabendo que a confiabilidade de cada linha é 0,75.