
Capítulo 5

Confiabilidade de Sistemas Série-Paralelo e Mistos

Flávio S. Fogliatto

1

Roteiro da apresentação:

◆ *Sistemas:*

- Série
- Paralelo
- Combinações Paralelo-Série, Série-Paralelo
- Sistemas k -em- n

2

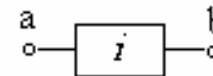
Suposições comuns a todos os sistemas analisados

- ◆ Confiabilidade de sistemas é avaliada num ponto t no tempo; ou seja, componentes apresentam confiabilidades estáticas em t .
- ◆ Componentes dos sistemas apresentam-se em dois estados: *operantes* ou *não-operantes*.
- ◆ Componentes falham independentemente.

3

Sistemas representados por diagramas funcionais de blocos

- ◆ Diagrama descreve função do sistema; p / sistemas c / mais de uma função = mais de um diagrama.
- ◆ Componente representado por bloco:



4

Notação

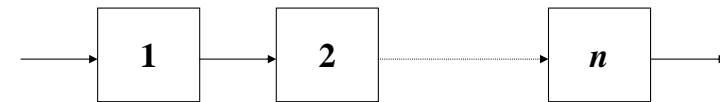
- ◆ E_i = evento do componente i estar operante no momento da verificação.
- ◆ $R_i = P(E_i)$ = confiabilidade do componente.
- ◆ R_S = confiabilidade do sistema.

Atenção: medidas avaliadas no tempo t de interesse para o analista.

5

1. Sistemas em Série

- ◆ Na prática, esta é a configuração mais comum.
- ◆ Num sistema em série, todos os componentes devem funcionar para que o sistema funcione.
- ◆ O diagrama de blocos p/ este sistema é:



6

A confiabilidade do sistema é:

$$R_S = P[E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n]$$

ou seja, o sistema funciona se todos os componentes funcionarem (por isso a intersecção de eventos).

Supondo independência entre falhas:

$$R_S = P(E_1) \times P(E_2) \times \dots \times P(E_n)$$

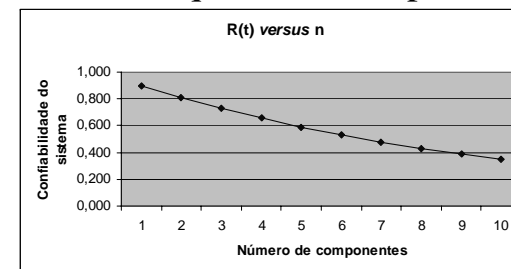
ou

$$R_S = \prod_{i=1}^n R_i$$

7

Propriedades do arranjo em série

- ◆ Confiabilidade do sistema decresce rapidamente a medida que n° de componentes aumenta.



Exemplo:

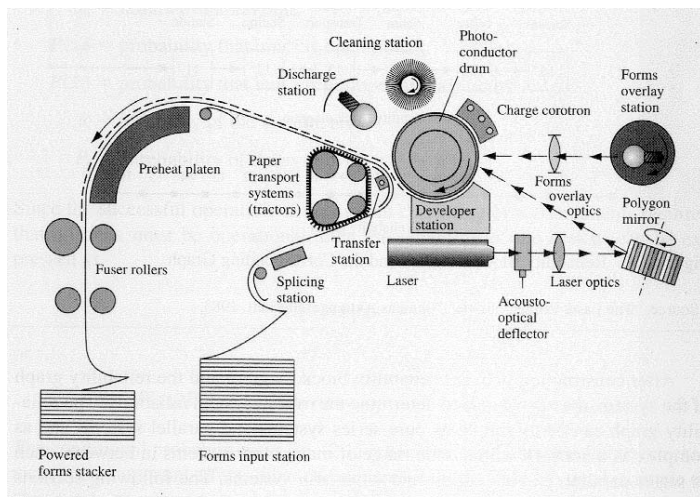
Suponha componentes $c/ R = 0.9$ num determinado tempo.

- ◆ Limite superior de R_S = confiabilidade do componente mais fraco; isto é:

$$R_S \leq \min\{R_i\}$$

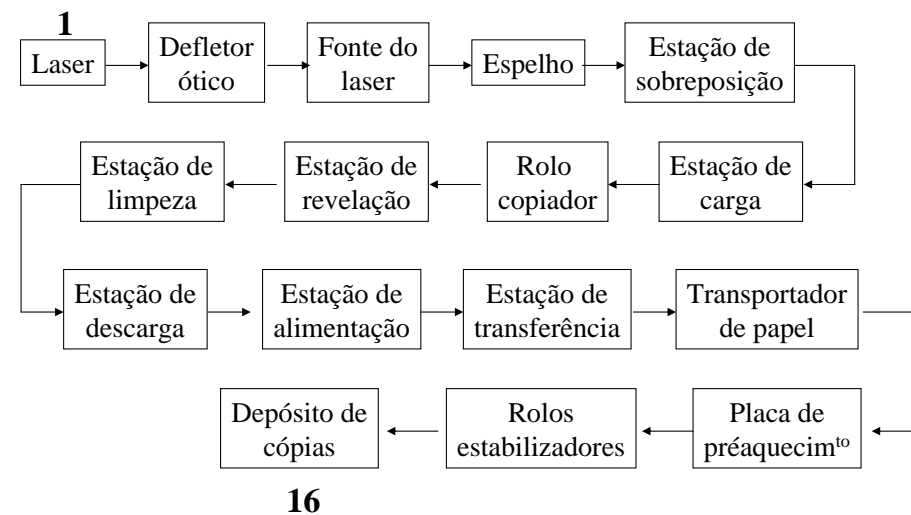
8

Exemplo 1: impressora a laser



9

Impressora a laser Diagrama de blocos



10

Impressora a laser Confiabilidade dos componentes

Componente	Confiabilidade
1	0,8760
2	0,8200
3	0,9187
4	0,9789
5	0,9760
6	0,9907
7	0,8029
8	0,8811
9	0,9718
10	0,8276
11	0,8488
12	0,8090
13	0,8064
14	0,8327
15	0,8437
16	0,8034

A confiabilidade do sistema é:

$$R_S = \prod_{i=1}^n R_i$$

$$R_S = (0.8760 \times 0.8200 \times \dots \times 0.8034)$$

$$R_S = 0.111$$

P/ obtermos uma confiabilidade de, digamos, 80% p/ o sistema:

$$R_S \approx 1 - n(1 - R) \quad R \approx 0.9875$$

$$0.8 \approx 1 - 16(1 - R)$$

Confiabilidade necessária
p/ componentes.

Exemplo 2: telefone sem fio

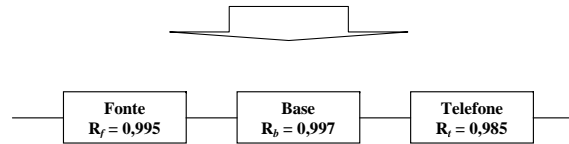
- ◆ Sistema em série composto por fonte, base e telefone.
- ◆ Componentes apresentam taxas de falha constantes:
 - Fonte: $\lambda_f = 5 \text{ falhas}/10^6 \text{ h}$
 - Base: $\lambda_b = 3 \text{ falhas}/10^6 \text{ h}$
 - Telefone: $\lambda_t = 15 \text{ falhas}/10^6 \text{ h}$
- ◆ Determine confiabilidade p/ 1000 horas de uso.

12

Confiabilidade dos componentes:

$$R_f(1000) = e^{-\lambda_f t} = e^{-5 \times 10^{-6}(1000)} = 0.995 \quad R_b(1000) = e^{-\lambda_b t} = e^{-3 \times 10^{-6}(1000)} = 0.997$$

$$R_t(1000) = e^{-\lambda_t t} = e^{-15 \times 10^{-6}(1000)} = 0.985$$



- ◆ Confiabilidade do sistema:

$$R_s(1000) = R_f \times R_b \times R_t = 0.977$$

13

Pausa para exercício

- ◆ Resolva os exercícios 1 e 2 da apostila.

14

2. Sistemas em Paralelo

- ◆ Num sistema em paralelo, *todos* os componentes devem falhar p/ que o sistema falhe.
- ◆ *Expressão da Confiabilidade:*

$$Q_s = P[\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \dots \cap \bar{E}_n]$$

↙ não-confiabilidade do sistema

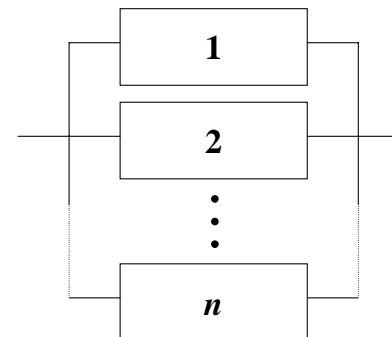
$$Q_s = P(\bar{E}_1) \times P(\bar{E}_2) \times \dots \times P(\bar{E}_n) = \prod_{i=1}^n (1 - R_i)$$

$$R_s = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i)$$

15

Três tipos de arranjo em paralelo

- ◆ **Paralelo puro** - componentes em operação simultânea; falhas não afetam desempenho dos componentes sobreviventes.



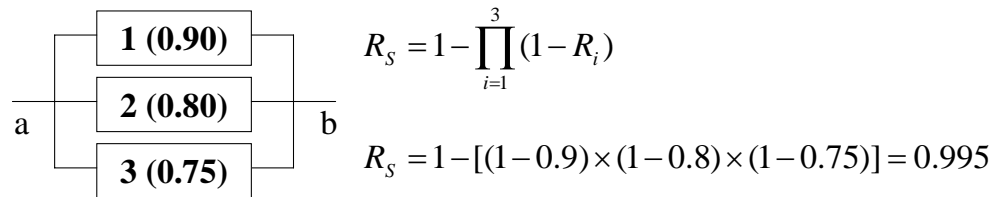
A expressão de confiabilidade apresentada anteriormente serve p/ este tipo de sistema.

16

Sistemas em paralelo puro

Exemplo

- ◆ Considere sistema c/ 3 componentes em paralelo:



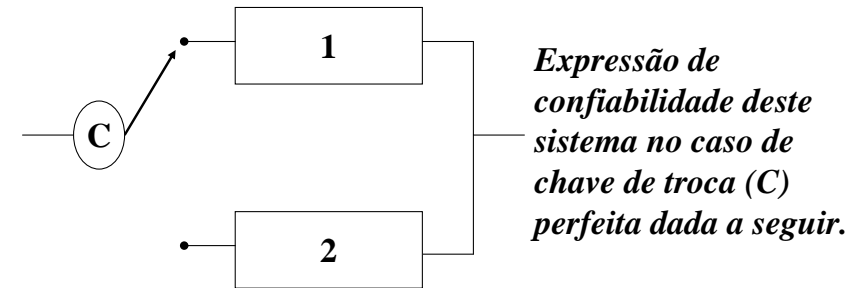
- ◆ R_S é maior que a confiabilidade do melhor componente.
- ◆ Quando comp. apresentam somente dois modos de falha, R_S aumenta com o n° de componentes.

17

Três tipos de arranjo em paralelo (Cont.)

Paralelo com *standby*

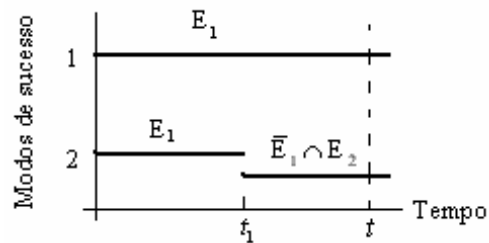
- ◆ Componente em *standby* somente é ativado quando componente ativo falhar.



18

Exemplo anterior c/ chave de troca perfeita

- ◆ T_i = tempo-até-falha do i -ésimo componente, c/ densidade $f_i(t)$.



$$R_S^2(t) = P[(T_1 > t) \cup (T_1 \leq t \cap T_2 > t - T_1)]$$

19

Modos de sucesso não podem ocorrer simultaneamente

- ◆ Confiabilidade do sistema:

$$R_S^2(t) = R_1(t) + \int_0^t f_1(t_1) R_2(t - t_1) dt_1$$

- ◆ No caso especial de componentes c/ taxa de falhas constante ($=\lambda$):

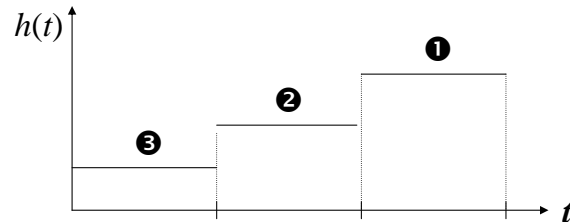
$$R_S^2(t) = e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)$$

20

Três tipos de arranjo em paralelo (Cont.)

Paralelo compartilhado

- ◆ Componentes ativados simultaneamente.
- ◆ Falha em um dos componentes afeta as taxas de falha dos sobreviventes.
- ◆ Análise de sistemas compartilhados utiliza diagrama de estado do sistema:



21

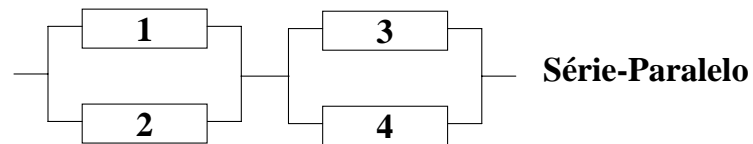
Pausa para exercício

- ◆ Resolva os exercícios 3 e 4 da apostila.

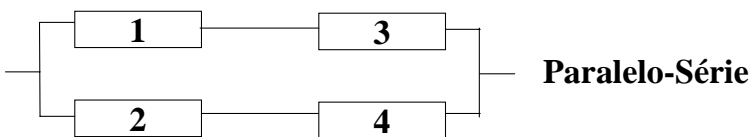
22

3. Combinações Paralelo-Série

- ◆ Dois exemplos:



Série-Paralelo

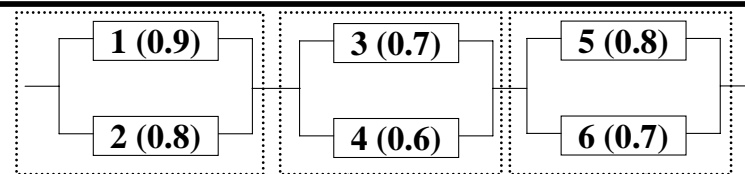


Paralelo-Série

- ◆ Análise feita decompondo sistemas em subsistemas em série e paralelo.

23

Exemplo: Série-Paralelo



- ◆ Decompor em 3 subsistemas em paralelo:

$$R_{SS_1} = 1 - [0.1 \times 0.2] = 0.98$$

$$R_{SS_3} = 1 - [0.2 \times 0.3] = 0.94$$

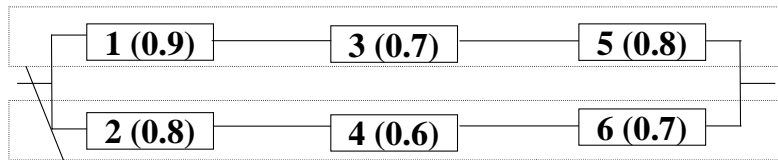
$$R_{SS_2} = 1 - [0.3 \times 0.4] = 0.88$$

- ◆ Tratar subsistemas como um sistema em série:

$$R_S = R_{SS_1} \times R_{SS_2} \times R_{SS_3} = 0.98 \times 0.88 \times 0.94 = 0.81$$

24

Exemplo: Paralelo-Série



- ◆ Decompor em 2 subsistemas em série:

$$R_{SS_1} = 0.9 \times 0.7 \times 0.8 = 0.504$$

$$R_{SS_2} = 0.8 \times 0.6 \times 0.7 = 0.336$$

- ◆ Tratar subsistemas como um sistema em paralelo:

$$R_S = 1 - [(1 - R_{SS_1})(1 - R_{SS_2})] = 0.67$$

25

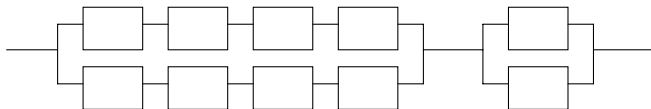
Observações sobre combinações paralelo-série / série-paralelo

- ◆ **Série-paralelo** = redundância no nível do componente (de baixo nível).
- ◆ **Paralelo-série** = redundância no nível do sistema (de alto nível)
- ◆ Pode-se demonstrar, p/ sistemas c/ mesmos componentes:
$$R(\text{série-paralelo}) \geq R(\text{paralelo-série})$$
- ◆ Diferença menos pronunciada em sistemas de componentes altamente confiáveis ($R > 0.9$).

26

Mais observações...

- ◆ Arranjos paralelo-série / série-paralelo podem apresentar-se combinados em arranjos mistos.
- ◆ Por exemplo:



27

Pausa para exercícios

- ◆ Resolva os problemas 5 e 6 da apostila.

28

4. Sistemas k -em- n

- ◆ Sistemas série e paralelo puro são casos especiais de sistemas k -em- n :
 - Série puro = sistema n -em- n
 - Paralelo puro = sistema 1-em- n
- ◆ No arranjo k -em- n , pelo menos k componentes devem estar operantes (de um total de n componentes) para que sistema opere satisfatoriamente.

29

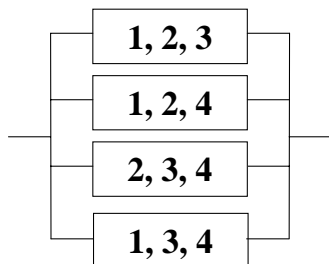
Exemplos

- ◆ Centrais de geração de energia operam $c/$ dois ou três geradores, mas necessitam de um único operante para suprir demanda.
- ◆ Pontes suspensas e guindastes constituídos de cabos $c/$ milhares de fios de aço; somente uma fração dos fios garante a sustentação da carga.
- ◆ Carros $c/$ cinco pneus (um *step*) precisam de pelo menos quatro funcionando $p/$ poder funcionar.

30

Cálculo da confiabilidade a partir de um exemplo

- ◆ Sistema de comunicações $c/$ quatro canais, três dos quais devem estar operantes $p/$ que o sistema esteja operante.



Possíveis combinações de componentes que caracterizam um sistema operante.

Situação onde todos os compon. estão operantes {1,2,3,4} foi omitida.

31

Combinações expressas através do coeficiente binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

No caso de componentes $c/$ confiabilidades idênticas e iguais a R , expressão de confiabilidade do sistema é:



$$R_s(k; n, R) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i}$$

32

Considere canais do ex. anterior c/ $R = 0.65$ (p/ missão de 2 anos)

- ◆ Sistema é do tipo 3-em-4, c/ confiabilidade dada por:

$$R_S = \sum_{i=3}^4 \binom{4}{i} (0.65)^i (1-0.65)^{4-i}$$

$$R_S = 4(0.65)^3(1-0.65) + 1(0.65)^4(1-0.65)^0$$

$$R_S = 0.563$$

- ◆ Sistemas k -em- n costumam apresentar boa confiabilidade (já que oferecem algum grau de redundância).

33

Quando componentes diferentes, R_S envolve cálculo de probabilidades

- ◆ $R_S = P(\underbrace{E_1 E_2 E_3}_{A_1} + \underbrace{E_1 E_2 E_4}_{A_2} + \underbrace{E_1 E_3 E_4}_{A_3} + \underbrace{E_2 E_3 E_4}_{A_4})$

- ◆ Cancelamento de probabilidades torna inclusão de $A_5 = E_1 E_2 E_3 E_4$ dispensável.

- ◆ $R_S = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1 A_2) + \dots + P(A_3 A_4) + P(A_1 A_2 A_3) + \dots + P(A_2 A_3 A_4) + P(A_1 A_2 A_3 A_4)$

34

Pausa para exercícios

- ◆ Resolva os problemas 12 e 13 da apostila.

35