3. Função de risco ou taxa de falha

Manutenção e Confiabilidade

Prof. Flavio Fogliatto

Função de risco, *h*(*t*)

- Mais importante das medidas de confiabilidade
- Trata-se da quantidade de risco associada a uma unidade (componente ou sistema) no tempo *t*
- Serve de base de comparação entre unidades com características distintas:
  - Unidades c/ mesma confiabilidade em *t* podem ter funções de risco bastante distintas

Como obter a função de risco

	$f(t)$	$R(t)$	$h(t)$	$H(t)$	$L(t)$
$f(t)$	•	$\int_t^{\infty} f(u)du$	$f(t) \Big/ \int_t^{\infty} f(u)du$	$-\ln\left[\int_t^{\infty} f(u)du\right]$	$\frac{\int_t^{\infty} u\,f(u)du}{\int_t^{\infty} f(u)du} - t$
$R(t)$	$-R'(t)$	•	$-R'(t) \big/ R(t)$	$-\ln R(t)$	$\frac{1}{R(t)}\int_t^{\infty} R(u)du$
$h(t)$	$h(t)e^{-\int_0^t h(u)du}$	$e^{-\int_0^t h(u)du}$	•	$\int_0^t h(u)du$	$\frac{\int_t^{\infty} e^{-\int_0^u h(y)dy}du}{e^{-\int_0^t h(u)du}}$
$H(t)$	$H'(t).e^{-H(t)}$	$e^{-H(t)}$	$H'(t)$	•	$e^{H(t)}\int_t^{\infty} e^{-H(u)}du$
$L(t)$	$\frac{1+L'(t)}{L(t)}e^{-\int_0^t \frac{1+L'(u)}{L(u)}du}$	$e^{-\int_0^t \frac{1+L'(u)}{L(u)}du}$	$\frac{1+L'(t)}{L(t)}$	$\int_0^t \frac{1+L'(u)}{L(u)}du$	•

Condições para uma função ser função de risco

- Condição 1:

$$\int_0^{+\infty} h(t)dt = +\infty$$

Equivalente a R(∞) = 0

- Condição 2:

$$h(t) \geq 0, \ p/ \ qq \ t$$

Exemplo
Relação entre funções

- Lâmpadas elétricas costumam apresentar *ttf*s descritos por uma dist. exponencial, c/ densidade dada por:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \ , \ t \geq 0$$

- Função de confiabilidade das lâmpadas é:

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(u)du = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} du = -e^{-\lambda u} \Big|_t^{\infty} = \left[0 - \left(-e^{-\lambda t} \right) \right] = e^{-\lambda t}$$

- Função de risco é: $h(t) = \dfrac{f(t)}{R(t)} = \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$

Exemplo (*Cont.*)

- λ = constante:
  - função de risco da distr. exponencial é constante no tempo
- Função de risco acumulada:

$$H(t) = \int_0^t h(u)du = \int_0^t \lambda du = \lambda t$$

- Conhecido o valor de λ a partir de testes de vida feitos com um lote das lâmpadas em questão, pode-se obter principais figuras de confiabilidade do produto.

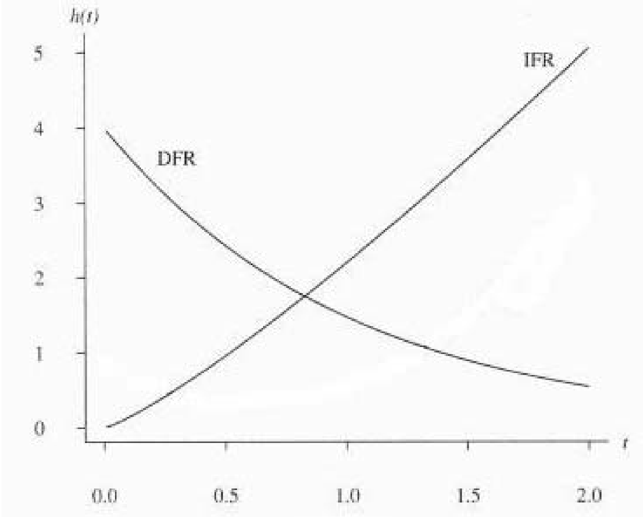
Categorias da função de risco e fases da vida de produtos

- Forma função de risco indica como uma unidade envelhece.
- Função de risco = quantidade de risco a que uma unidade está exposta no tempo *t*:
  - valor pequeno para função implica em unidade exposta a menor quantidade de risco

Categorias da função de risco

- Duas categorias básicas:
  - (*i*) crescente, *IFR* (*increasing failure rate*) - incidência de risco não decresce com o tempo; e
  - (*ii*) decrescente, *DFR* (*decreasing failure rate*) - incidência de risco não cresce com o tempo.
- Outras categorias (derivadas das 1as): funções crescentes e decrescentes na média.
- Função constante é caso limítrofe entre IFR e DFR.

Graficamente



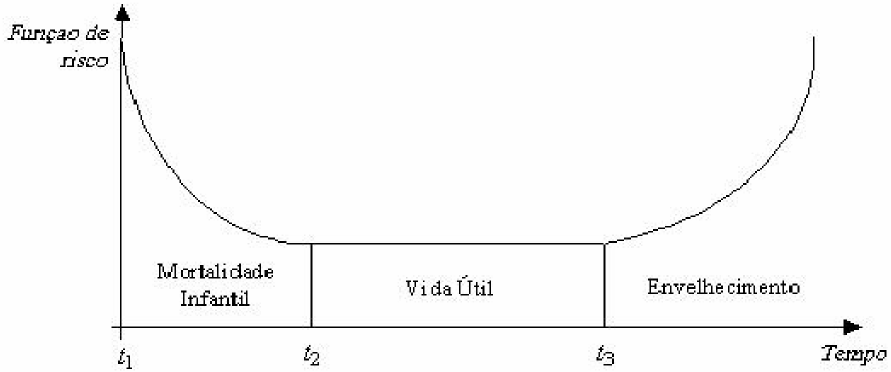
Exemplos das categorias

- **Crescente**:
  - itens que se desgastam ou degradam com o tempo
  - componentes mecânicos, em sua quase totalidade
- **Decrescente**:
  - na modelagem de confiabilidade de *softwares*, onde a incidência de *bugs* diminui a medida em que o produto sofre revisões
- Maioria dos produtos manufaturados apresenta função de risco dada pela combinação das categorias.

Curva da banheira

- Modelo divide vida operacional de um produto em três estágios:
  - (1) de mortalidade infantil (quando ocorrem falhas precoces),
  - (2) de vida útil (onde a incidência de falhas é relativamente estável no tempo), e
  - (3) de envelhecimento (quando o produto passa a apresentar desgaste acentuado e falhas passam a ocorrem com maior frequência).

Graficamente



Fases da curva da banheira

- **1º estágio:** região de alta, porém decrescente, taxa de falha.
  - Falhas = defeitos relacionados a matérias-primas e operações de manufatura que não atendem às normas de especificação (causas especiais).
  - Mortalidade infantil reduzida através da adoção de projetos robustos de produto, práticas de controle de qualidade na manufatura, ou *burn in*:
    - No *burn in*, testam-se unidades em condições normais de uso por período de tempo suficiente p/ que defeitos precoces sejam detectados e corrigidos antes das falhas.

Fases da curva da banheira

- **2º estágio**: fase de vida útil, menor taxa de falha do gráfico, aprox. constante.
  - Falhas causadas por eventos aleatórios, designadas por causas comuns e não-relacionadas a defeitos inerentes às unidades.
    - P. ex., sobrecargas de voltagem, vibração e impactos, aumentos na temperatura e umidade durante a operação normal das unidades.
  - Falhas por causas comuns podem ser reduzidas através da melhoria nos projetos dos produtos, tornando-os mais robustos.

Fases da curva da banheira

- **3º estágio**: envelhecimento, região de taxa de falha crescente, dominada por falhas relacionadas ao desgaste da unidade.
  - Exemplos: corrosão e trincas por fadiga.
  - Aumento da taxa de falha normalmente indica a necessidade de reposição de peças no produto, informando acerca da duração aproximada de sua vida de projeto.
  - Alternativas para amenizar intensidade do envelhecimento:
    - projeto de produtos c/ componentes e materiais mais duráveis,
    - práticas de manutenção preventiva e corretiva
    - controle de fatores ambientais de *stress* que possam intensificar a taxa de falha do produto.

Curva da banheira ilustra comportamento médio

- Computadores e componentes eletrônicos costumam apresentar função de risco dominada pelo estágio de vida útil, c/ períodos curtos de mortalidade infantil e envelhecimento:
  - Para esses sistemas, atenção especial deve ser dada a falhas aleatórias e métodos de controle do ambiente de utilização do produto.
- Em equipamentos e componentes mecânicos, função de risco é dominada pelos estágios 1 e 3 da curva da banheira, sendo o estágio 2, de vida útil, praticamente ausente.

Modelos de risco

- Seis modelos de risco:
  - constante,
  - crescente,
  - decrescente,
  - curva da banheira *piecewise* linear,
  - função de potência e
  - exponencial.
- Utilização combinada dos modelos permite representar quase totalidade dos mecanismos de risco existentes na prática.

Modelo de risco constante

- A função de risco constante é representada por:

$$h(t) = \lambda \quad \text{falhas/unidade de tempo}$$

onde λ é uma constante.

- Função de densidade correspondente é função de uma variável exponencialmente distribuída.

Modelo de risco linearmente crescente

- Corresponde ao último estágio da curva da banheira, normalmente representado por uma função não-linear.
- Função linear a seguir é uma simplificação desse modelo:

$$h(t) = \lambda t$$

onde λ é uma constante.

- Função de densidade associada à eq. acima é dada por:

$$f(t) = \lambda t \exp\left[-\int_0^t \lambda t du\right] = \lambda t e^{-\frac{\lambda t^2}{2}}$$

correspondendo à função de densidade da distribuição de Rayleigh.

Modelo de risco linearmente decrescente

- Provê uma representação simplificada do primeiro estágio da curva da banheira, dada por:

$$h(t) = a - bt$$

tal que a e b são constantes, e $a > bt$.

- Função de densidade associada à eq. acima não corresponde a nenhuma distribuição de probabilidade em particular.

Modelo de risco linear "piecewise" da curva da banheira

- Modelo linear da curva da banheira é bastante versátil:
  - ajusta-se satisfatoriamente a funções de risco calculadas empiricamente.
- Modelo oferece aproximação linear da curva da banheira, tipicamente não-linear:

$$h(t)=\begin{cases} a-bt+\lambda, & 0\le t\le a/b \\ \lambda, & a/b\le t\le t_0 \\ c(t-t_0)+\lambda, & t_0<t \end{cases}$$

$$\boxed{h(t)=\begin{cases} a-bt+\lambda, & 0\le t\le a/b \\ \lambda, & a/b\le t\le t_0 \\ c(t-t_0)+\lambda, & t_0<t \end{cases}}$$

- $\lambda > 0$.
- Função decresce linearmente até λ no tempo a/b, permanece constante até t_0, e cresce linearmente para tempos maiores que t_0.
- Densidade associada à região de risco constante, p. ex., é:

$$f(t)=\lambda\exp\left[-\left(\lambda t+a^2/2b\right)\right], \qquad a/b<t\le t_0$$

Modelo de risco da função de potência

- Função é dada por: $h(t)=\dfrac{\gamma}{\theta}\left(\dfrac{t}{\theta}\right)^{\gamma-1}$
- A função de densidade associada é: $f(t)=\dfrac{\gamma}{\theta}t^{\gamma-1}e^{-t^{\gamma}/\theta}$ Weibull
- Weibull permite representação não-linear plena da curva da banheira:
  - Estágio 1 é obtido quando $\gamma < 1$
  - Estágio 2 é obtido quando $\gamma = 1$
  - Estágio 3 é obtido quando $\gamma > 1$

Modelo de risco exponencial

- Modelo de risco exponencial usado quando função de risco crescer ou decrescer abruptamente, apresentando comportamento exponencial:

$$h(t)=ce^{\alpha t}$$

- Natureza do modelo depende dos valores das constantes c e α.
- Função de densidade correspondente é um caso especial da distribuição do valor extremo.

Classificação de distribuições de tempos-até-falha a partir da função de risco

- Quatro distribuições comumente usadas serão consideradas:
  - Exponencial
  - Weibull
  - Gama
  - Lognormal

Classificação

Distribuição	IFR	DFR
Exponencial	SIM $_{p/\ todo\ \lambda}$	SIM $_{p/\ todo\ \lambda}$
Weibull	SIM $_{\gamma \geq 1}$	SIM $_{\gamma \leq 1}$
Gama	SIM $_{\gamma \geq 1}$	SIM $_{\gamma \leq 1}$
Lognormal	NÃO	NÃO

IFR = taxa de falha crescente
DFR = taxa de falha decrescente

Estimativa da função de risco a partir de dados empíricos

- Estimativa depende do tamanho da amostra.
- Ilustração utiliza dois exemplos.

Estimação de *h*(*t*) para pequenas amostras

Dados de falha e estimativa de $h(t)$ – amostra de tamanho pequeno

Número da falha	*Kilociclos até falha*	$\hat{h}(t)$	*Número da falha*	*Kilociclos até falha*	$\hat{h}(t)$
1	190	0,0024	5	350	0,0180
2	245	0,0050	6	365	0,0247
3	275	0,0070	7	380	0,0294
4	300	0,0171	8	400	-

Resultados

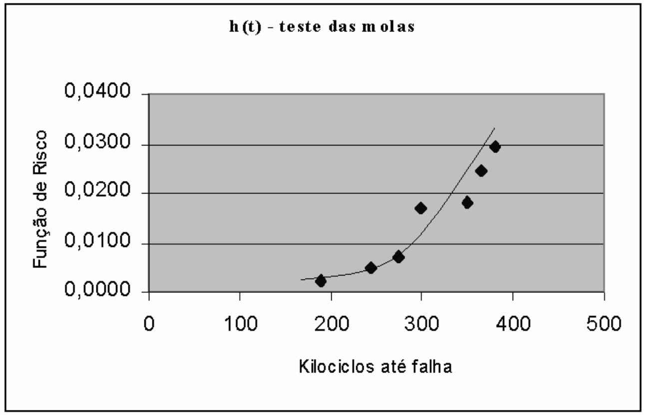
- Estimador de $h(t)$ é:

Gráfico resultante

$$\hat{h}(t_i) = \frac{1}{\left[(t_{i+1} - t_i)(n - i + 0{,}7)\right]}$$

Tamanho da amostra

Gráfico de *h*(*t*)



distribuição de Weibull, com $\gamma = 4$ e $\theta = 1$

Estimação de *h*(*t*) para grandes amostras

Dados de falha e estimativa de $h(t)$ – amostra de tamanho grande

Intervalo (km)	*Número de falhas*	$\hat{h}(t)$
$0 \le m \le 20.000$	19	0,0000207
$20.000 < m \le 40.000$	11	0,0000204
$40.000 < m \le 60.000$	7	0,0000219
$60.000 < m \le 80.000$	5	0,0000278
$80.000 < m \le 100.000$	4	0,0000500
$m > 100.000$	0	-

- Estimador de *h*(*t*) é:

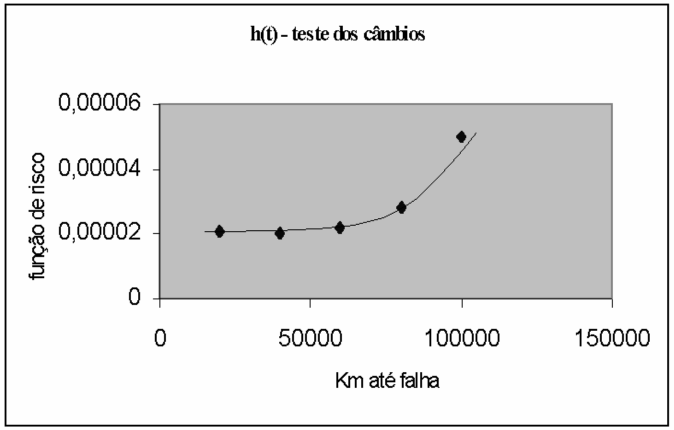
$$\hat{h}(t) = \frac{46-27}{46(20000)} = 0,0000207$$

$$\hat{h}(t) = \frac{\bar{N}(t) - \bar{N}(t+\Delta t)}{\bar{N}(t)\Delta t}$$

Nº unidd sobreviventes no tempo *t*

Δt é intervalo de classe

Gráfico de *h*(*t*)



Exercícios

- Resolva os exercícios 1, 4, 5 e 16 da apostila (Cap. 3).