ENGENHARIA DA QUALIDADE A
ENG 09008

AULA 9
TWO-WAY ANOVA

PROFESSORES:

CARLA SCHWENGBER TEN CATEN
ROGÉRIO FEROLDI MIORANDO
KARINA ROSSINI

Tópicos desta aula

- Projetos de Experimentos com dois fatores
  - Projetos fatoriais
  - Two-way ANOVA com repetição
  - Two-way ANOVA sem repetição

Projetos Fatoriais

- Muitos experimentos envolvem o estudo de dois ou mais fatores.
- Se todas as combinações de níveis dos fatores são investigadas, então tem-se um projeto fatorial.
  - **Exemplo do que se faz na indústria**: Uma empresa estava interessada em aumentar o teor de pureza de uma substância química. Os dois fatores mais importantes que influenciavam o teor de pureza eram a temperatura e a pressão do reator.

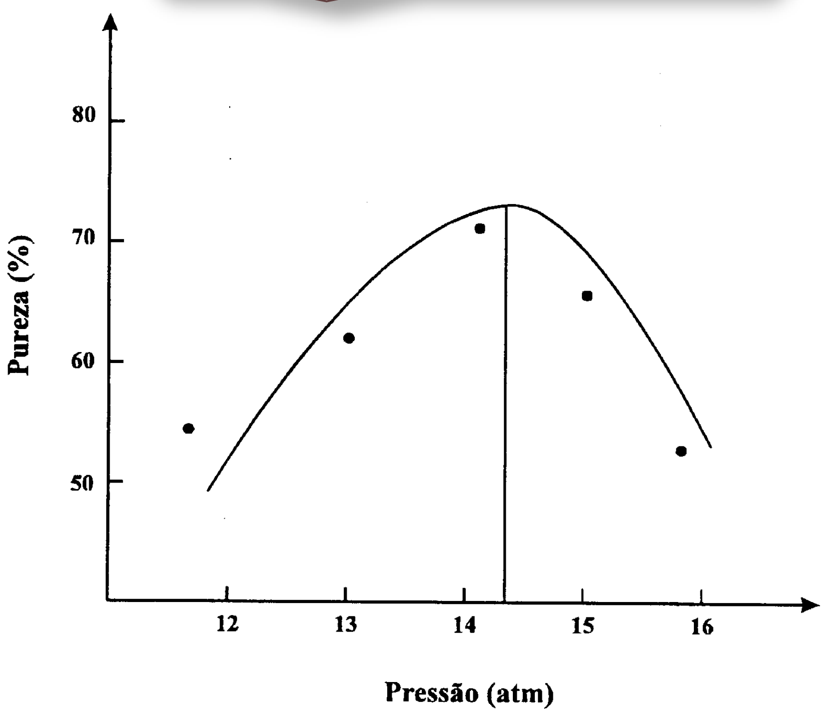
    Objetivo: determinar os níveis de temperatura e pressão que maximizassem o teor de pureza.

    Como: *1.* fixar a temperatura em 65 ^oC e variar pressão; *2.* fixar a melhor pressão, variar a temperatura obtendo a resposta.

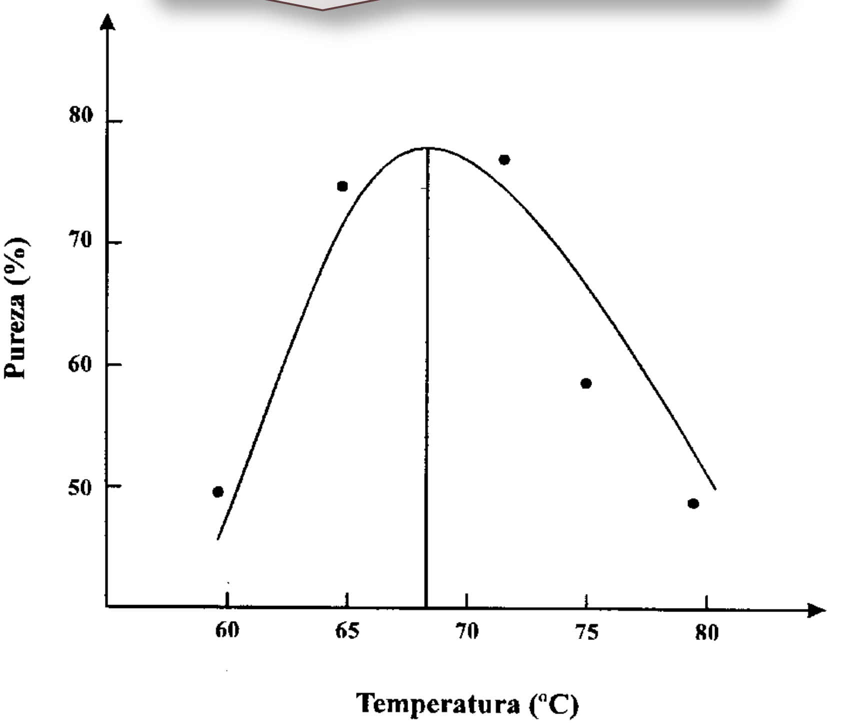
Gráficos do exemplo

- Neste exemplo os fatores foram testados um de cada vez

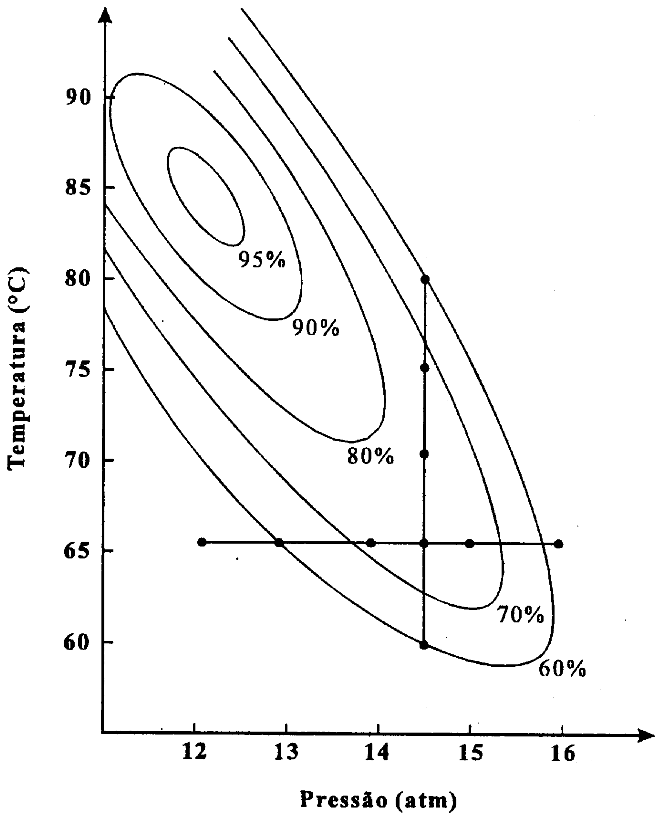
Temperatura fixada em 65°C



Pressão fixada em 14,3 atm



Gráficos do exemplo



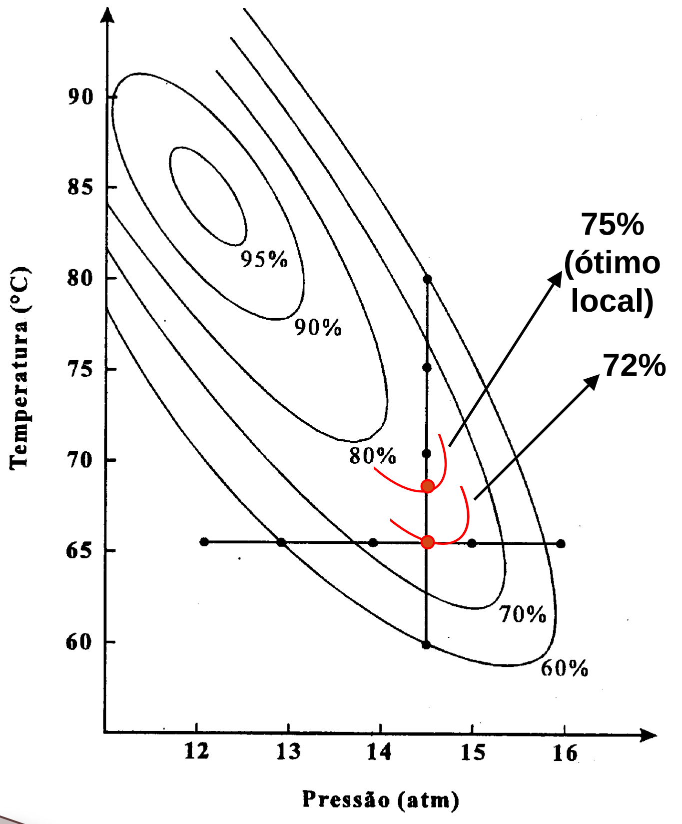
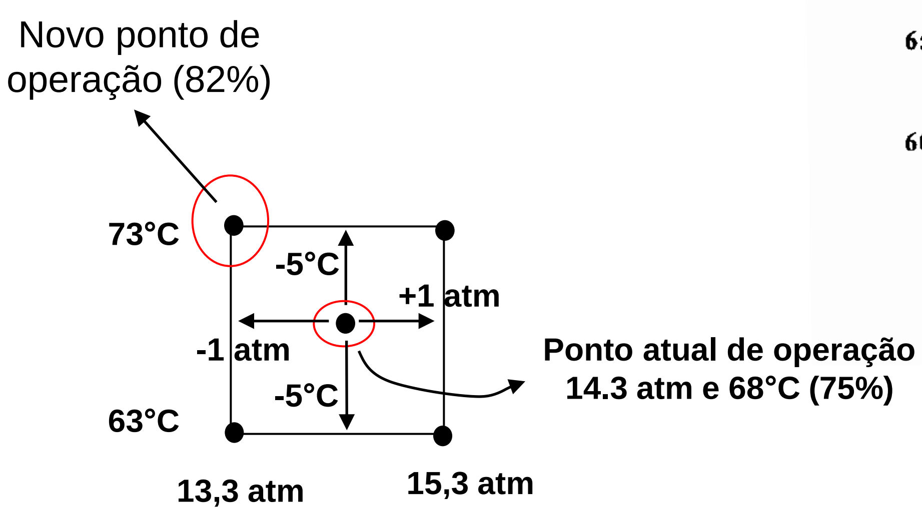


Gráfico com os fatores controláveis (FC) testados um de cada vez (5 níveis cada)

Gráficos do exemplo

Condições operacionais atuais:

- **Temperatura: 68°C**
- **Pressão: 14,3 atm**
- **Pureza: 75%**



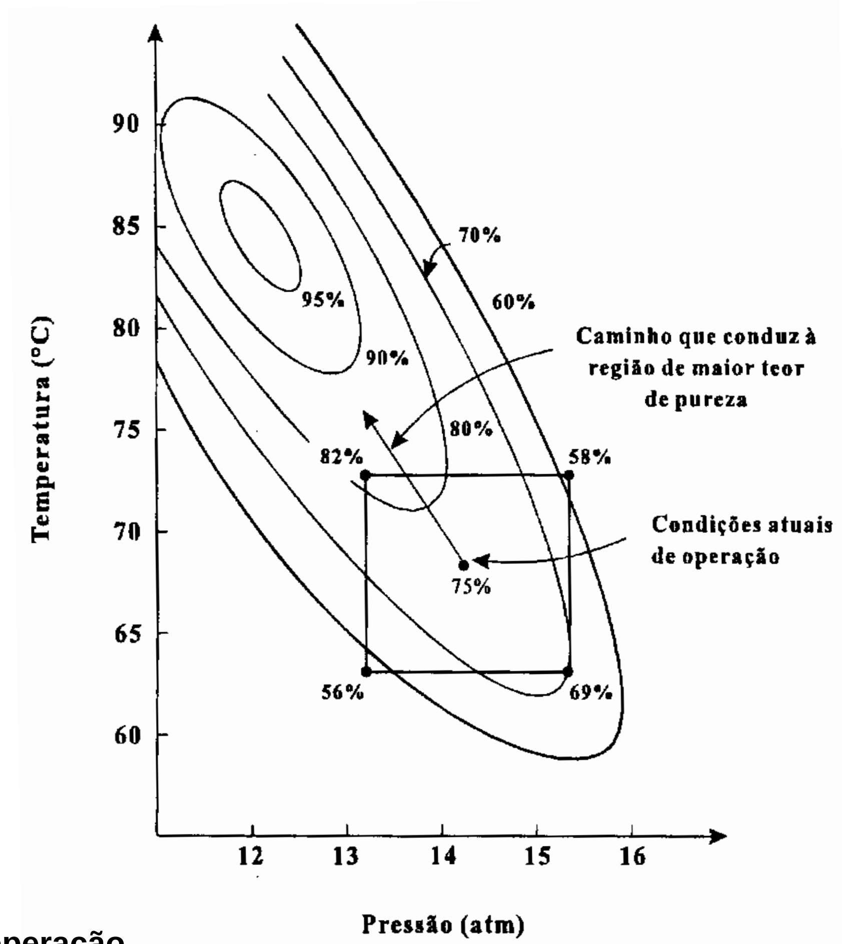
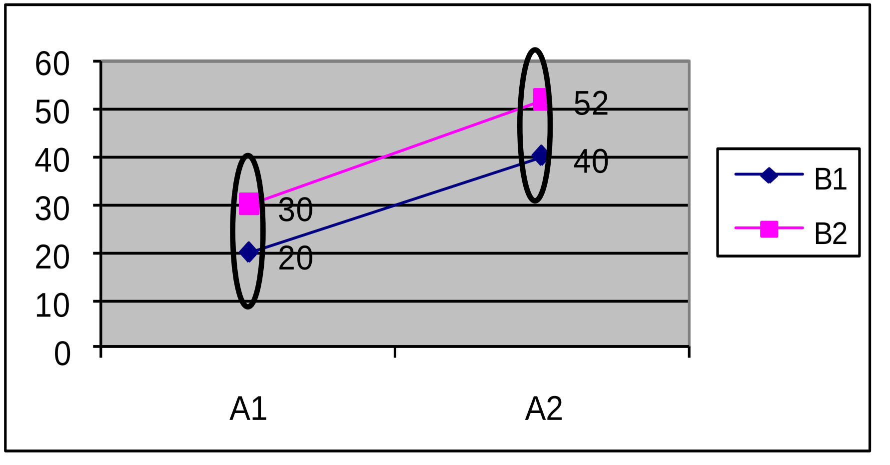


Gráfico com os FC testados ao mesmo tempo (2 níveis cada)

Projetos fatoriais

- É aquele no qual para cada réplica completa do experimento, todas as possíveis combinações dos níveis dos fatores são pesquisadas resultando
- Cada uma das possíveis combinações de níveis é chamada de “**Tratamento**” ou (setup)
- Por exemplo, sejam os dados da tabela N=a x b= 2 x 2= 4

	B1	B2	Média
A1	20	30	25
A2	40	52	46
Média	30	41	



Projetos fatoriais

- O efeito de um fator é definido como a mudança que aparece na resposta quando muda-se o nível deste fator. Assim,
- Efeito A = média A2 –média A1
- Efeito A = $\frac{40+52}{2}-\frac{20+30}{2}$ = 46 - 25 =21
- Isto é, passando do nível A1 para o nível A2 há uma mudança média na resposta de 21 unidades.

Projetos fatoriais

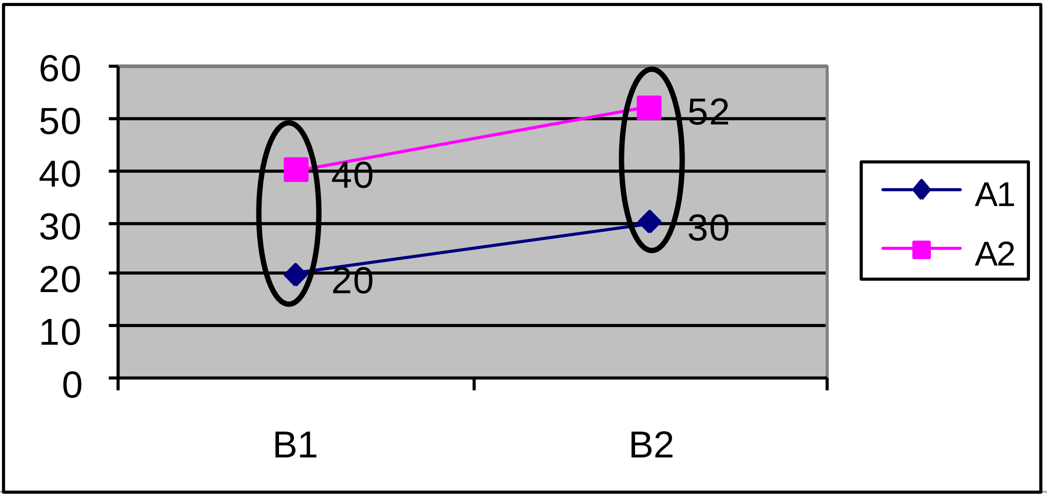
- Similarmente,
- Efeito de B = $\frac{30+52}{2} - \frac{20+40}{2}$ = 41 - 30 = 11

	B1	B2	Média
A1	20	30	25
A2	40	52	46
Média	30	41	

21

11

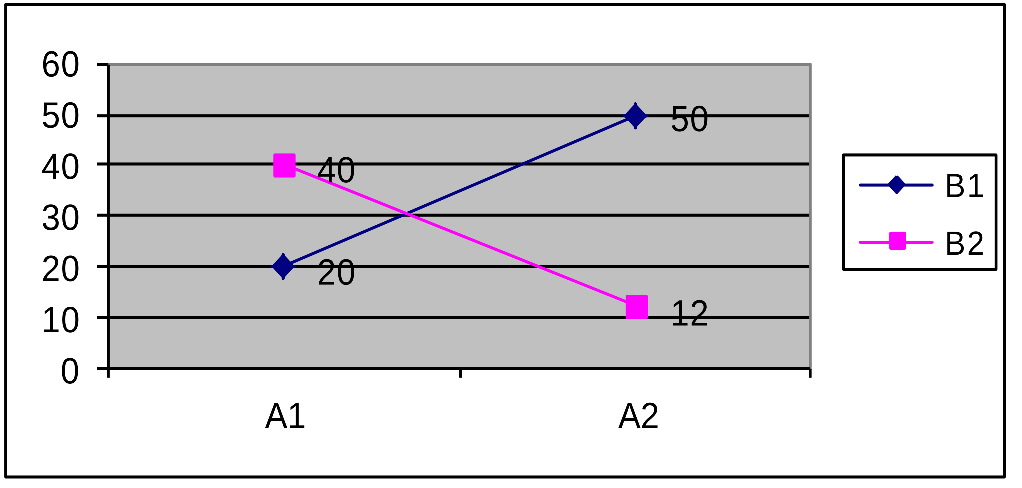
Não existe efeito de interação pois o efeito do fator A é o mesmo para os diferentes níveis do fator B; As retas são quase paralelas



Projetos fatoriais

- Em alguns experimentos a diferença na resposta observada quando se modifica os níveis de um dos fatores irá depender do nível do outro fator. Por exemplo:

	B1	B2
A1	20	40
A2	50	12



- Nesse caso, diz-se que há uma interação entre A e B, ou seja, o efeito do fator A é diferente dependendo do nível do fator B.

Projetos fatoriais

- Os gráficos de dois fatores são úteis para esclarecer a natureza da interação.
- Quando a interação é forte, **os efeitos principais** têm pouco interesse prático, por exemplo, para esses dados:
- Efeito A $= \frac{50+12}{2} - \frac{20+40}{2}$ = 31-30=1
- O fator A tem um efeito pequeno?
  - **Errado**!
  - O fator A tem um efeito pronunciado, mas esse efeito depende do nível do fator B:
  - Em B1 Efeito de A = 50 - 20 = 30
  - Em B2 Efeito de A = 12 - 40 = -28

	B1	B2	Média
A1	20	40	30
A2	50	12	31
	30	-28	

Vantagens dos experimentos fatoriais

- Comparando:

	B1	B2
A1	xx	xx
A2	xx	

Um-fator-de-cada-vez

	B1	B2
A1	x	x
A2	x	x

Fatorial Cruzado

- Fatoriais cruzados são mais econômicos;
- Fatoriais cruzados permitem que se avalie os efeitos principais e os efeitos de interações.

Two-way Anova

- Os experimentos fatoriais mais simples envolvem dois fatores;
- Fator A com "a" níveis e Fator B com "b" níveis.
- Cada repetição completa do experimento envolve “N=axb" ensaios.

Two-way Anova

		Fator B 1	2	...	b
Fator A	1	$Y_{111}, Y_{112}, Y_{11n}$	$Y_{121}, Y_{122}, Y_{12n}$	...	$Y_{1b1}, Y_{1b2}, Y_{1bn}$
	2	$Y_{211}, Y_{212}, Y_{21n}$	$Y_{221}, Y_{222}, Y_{22n}$		: :
	: :	: :			: :
	a	$Y_{a11}, Y_{a12}, Y_{a1n}$	...	...	$Y_{ab1}, Y_{ab2}, Y_{abn}$

Modelo estatístico

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

i = 1, a

j = 1, b

k = 1, n

- onde: μ é a média geral;
  τ_i é o efeito do i-ésimo nível de A;
  β_j é o efeito do j-ésimo nível de B;
  $(\tau\beta_{ij})$ é o efeito da interação AB;
  ε_{ijk} é o erro aleatório.

- Suposições: $\varepsilon_{ijk} \rightarrow N(0,\sigma)$

Hipóteses a serem testadas

- Para o fator A: H_0: $\tau_i = 0$

  H_1: $\tau_i \neq 0$ para algum *i*.

- Para o fator B: H_0: $\beta_j = 0$

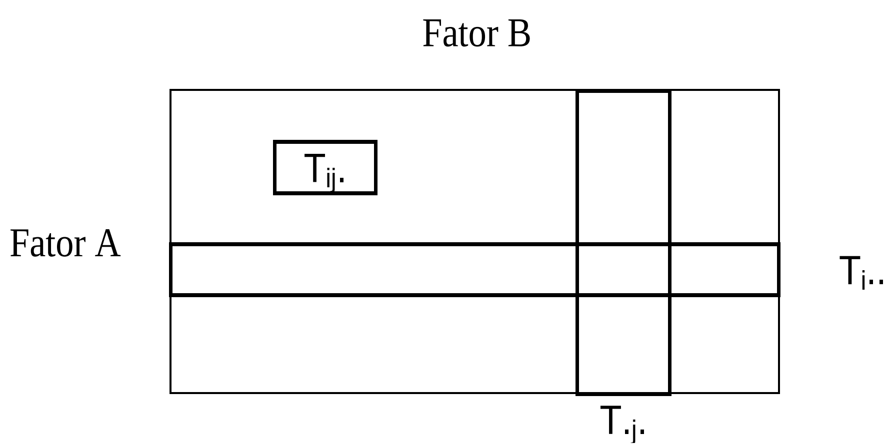
  H_1: $\beta_j \neq 0$ para algum *j*.

- Para a interação AB: H_0: $(\tau\beta)_{ij} = 0$

  H_1: $(\tau\beta)_{ij} \neq 0$ para algum *ij*.

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Formulário para os cálculos



$$TC = \frac{(T\ldots)^2}{abn}$$

$$SQA = \sum_{i=1}^{a} \frac{(T_{i..})^2}{bn} - TC$$

$$SQB = \sum_{j=1}^{b} \frac{(T_{.j.})^2}{an} - TC$$

$$SQAB = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{(T_{ij.})^2}{n} - TC - SQA - SQB$$

$$SQR = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{(T_{ij.})^2}{n}$$

$$SQT = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - TC$$

Verificação:
SQT = SQA + SQB + SQAB + SQR

Tabela ANOVA para projetos de 2 fatores

Fonte de variação	Soma dos quadrados	GL	Médias quadradas	Teste F
A	SQA	(a-1)	MQA	F= MQA / MQR
B	SQB	(b-1)	MQB	F= MQB / MQR
AB	SQAB	(a-1)(b-1)	MQAB	F= MQAB / MQR
Erro	SQR	ab(n-1)	MQR	
Total	SQT	abn-1		

Tabela ANOVA para projetos de 2 fatores

$$F_{calc} = \frac{Variância \;\; entre \; grupos \; (MQG \; \text{do fator})}{Variância \;\; dentro \; do \; grupo \; (MQR \; \text{do erro})}$$

- Se um fator ou interação não é significativo, o valor esperado de sua MQ é igual ao valor esperado da MQR
- Se um fator ou interação é significativo, o valor esperado de sua MQG será maior que o valor esperado da MQR
- Se $F_{calc} > F_{tab} = F_{\alpha, k-1, N-k}$ $\quad F_{tab} = F_{\alpha, GL_{numerador}, GL_{denomnador}}$
- Ou se valor-p< alfa=0,05 (5%) $\rightarrow$ Efeito correspondente é significativo

Exemplo

- Suspeita-se que a voltagem de saída de um tipo de bateria é afetada pelo material usado nas placas e pela temperatura. A voltagem é do tipo nominal-é-melhor com valor nominal de 127V. Quatro repetições completas de um experimento fatorial cruzado foram rodadas em laboratório e os seguintes dados foram obtidos:

Exemplo

Material (A)	Temperatua (B) 50	65	80	$T_{i..}=$
1	130 155 74 180 **539** **134,75**	34 40 80 75 **229** **57,25**	20 70 82 58 **230** **57,50**	**998** **83,17**
2	150 188 159 126 **623** **155,75**	151 137 121 130 **539** **134,75**	50 100 83 60 **293** **73,25**	**1455** **121,25**
3	138 110 168 160 **576** **144,00**	174 120 150 139 **583** **145,75**	96 104 82 60 **342** **85,50**	**1501** **125,08**
$T_{.j.}=$	**1738** **144,83**	**1351** **112,58**	**865** **72,08**	**3954** **109,83**

a = 3 b = 3 n = 4

Exemplo

$$TC = \frac{(T...)^2}{abn}$$

$$TC = \frac{(3954)^2}{36} = 434281$$

$$SQA = \frac{\sum (T_{i..})^2}{bn} - TC$$

$$SQA = \frac{(998)^2}{12} + \frac{(1455)^2}{12} + \frac{(1501)^2}{12} - 434281 = 12888$$

$$SQB = \frac{\sum (T_{.j.})^2}{an} - TC$$

$$SQB = \frac{(1738)^2}{12} + \frac{(1351)^2}{12} + \frac{(865)^2}{12} - 434281 = 31892$$

Exemplo

$$\text{SQAB} = \frac{\sum (T_{ij.})^2}{n} - TC \text{ - SQA - SQB}$$

$$\text{SQAB} = \frac{(539)^2}{4} + \frac{(229)^2}{4} + \ldots + \frac{(342)^2}{4} - 434281 - 12888 - 31892 = 8187$$

$$\text{SQT} = \sum y_{ijk}^2 - TC$$

$$\text{SQT} = \sum y_{ijk}^2 - 434281 = 71611$$

$$\text{SQR = SQT - SQA - SQB - SQAB}$$

$$\text{SQR} = 71611 - 12888 - 31892 - 8187 = 18644$$

Exemplo

$$F_{tab_A} = F_{0,05;2;27} = 3{,}35$$
$$F_{tab_{AB}} = F_{0,05;4;27} = 2{,}73$$

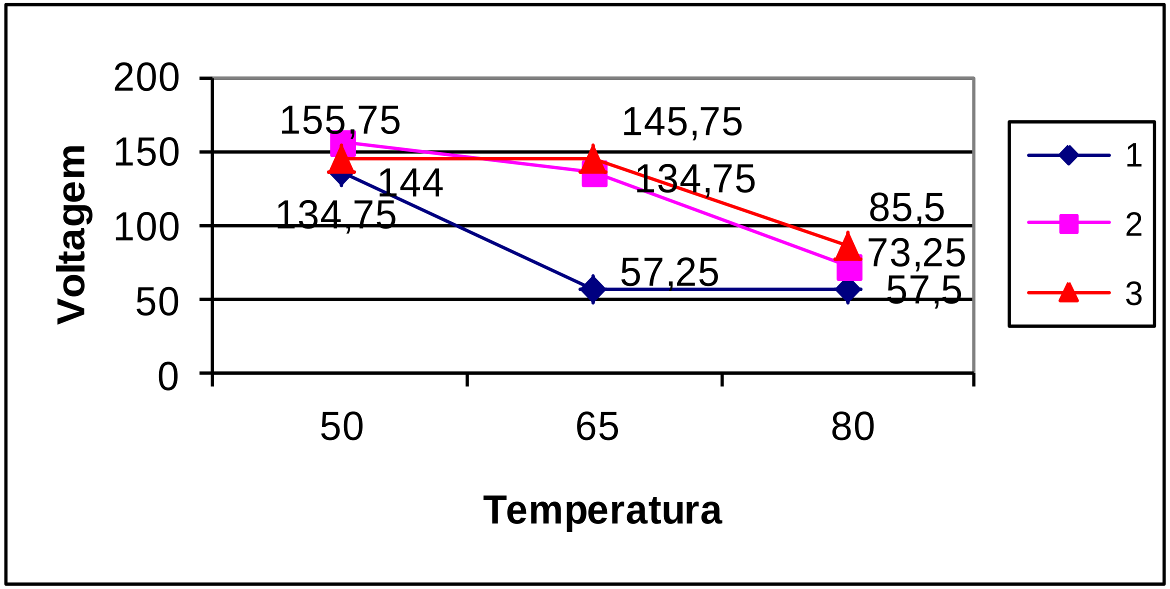
Fonte de variação	Soma dos quadrados	GL	Médias quadradas	F calculado	F tabelado
Material (A)	12888	2	6444	9,3	3,35
Temperatura (B)	31892	2	15946	23,1	3,35
AB	8187	4	2047	3,0	2,73
Erro	18644	27	691		
Total	71611	35			

O efeito do Material é significativo Fcalc=9,3 > Ftab=3,35 ;

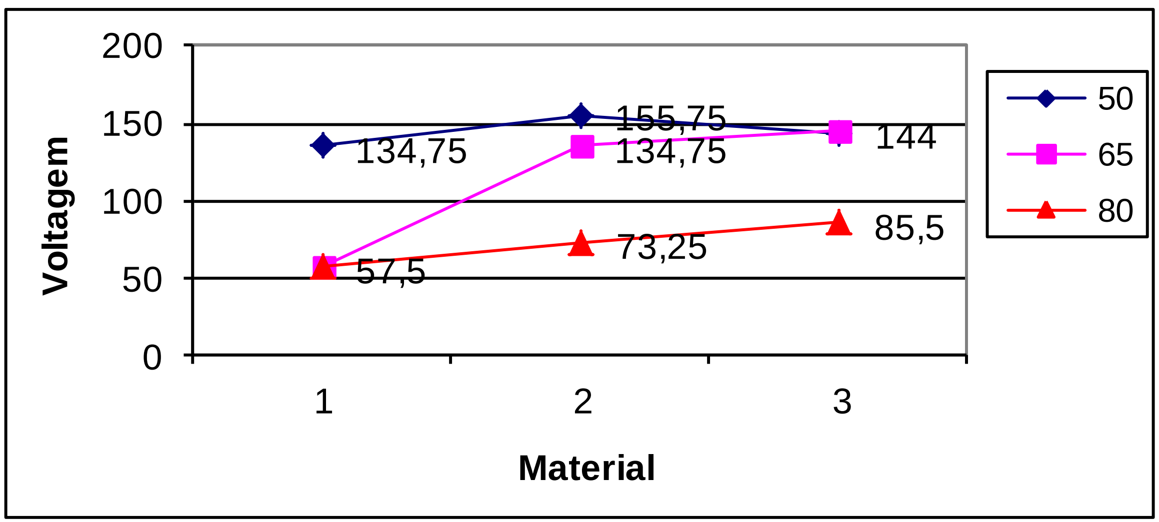
O efeito da Temperatura é significativo Fcalc=23,1 > Ftab=3,35 ;

O efeito da interação é significativo Fcalc=3,0 > Ftab=2,37

Exemplo



200
150
100
50
0
Voltagem
155,75
145,75
144
134,75
134,75
85,5
73,25
57,25
57,5
50
65
80
Temperatura
1
2
3



200
150
100
50
0
Voltagem
155,75
134,75
134,75
144
85,5
73,25
57,5
1
2
3
Material
50
65
80

Comparação múltipla de médias (CMM)

Se há efeitos significativos, em geral procede-se uma CMM.

- Se apenas os efeitos principais são significativos (ou seja, a interação não é significativa)
  - CMM para cada fator individualmente
  - Usar gráfico de barras ou linhas
- O desvio-padrão das médias é calculado como:
  - O Valor esperado da MQR é igual a variância: E(MQR) = σ^2
  - Como o desvio padrão das médias é $\sigma_{\bar{y}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - Logo, usa-se $S_{Y_{i..}} = \sqrt{\dfrac{MQR}{bn}}$ $\quad S_{Y_{.j.}} = \sqrt{\dfrac{MQR}{an}}$

Comparação múltipla de médias (CMM)

- Se a interação é significativa (independentemente se os efeitos principais são ou não significativos)
  - CMM somente para a interação
  - As comparações devem ser feitas fixando-se um nível de um dos fatores e comparando as médias dos níveis do outro fator.
  - Usar gráfico de linhas
- O desvio-padrão das médias é calculado como:
  - O Valor esperado da MQR é igual a variância: E(MQR) = σ^2
  - Como o desvio padrão das médias é $\sigma_{\bar{y}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - Logo usa-se $S_{Y_{ij.}} = \sqrt{\frac{MQR}{n}}$

Comparação múltipla de médias (CMM)

- Como a voltagem é do tipo nominal-é-melhor com valor nominal de 127V, pode-se investigar se há DS entre as médias obtidas com os três tipos de materiais para a Temperatura de 65ºC

  Fator fixo: Temperatura

  Nível fixo do fator: 65ºC

  Análise nos níveis do fator Material

(i) Médias em ordem crescente:

$\bar{y}_{12}$ = 57,25 (material 1)

$\bar{y}_{22}$ = 134,75 (material 2)

$\bar{y}_{32}$ = 145,75 (material 3)

Comparação múltipla de médias (CMM)

(ii) Desvio padrão das médias:

- O Valor esperado da MQR é igual a variância: E(MQR) = σ^2
- Como o desvio padrão das médias é $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Teorema do limite central

- Então o desvio padrão das médias da interação pode ser descrito como:

$$S_{Y_{ij.}} = \sqrt{\frac{MQR}{n}}$$

$$S_{Y_{ij.}} = \frac{\sqrt{MQR}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{691}}{\sqrt{4}} = \frac{26,2}{2} = 13,1$$

Comparação múltipla de médias (CMM)

(*iii*) Limite de decisão:

$$L_d = 3 \times S_{Y_{ij.}} = 3 \times 13{,}1 = 39{,}3$$

(*iv*) Comparação das médias duas a duas:

$$\bar{y}_{32} - \bar{y}_{22} = 145{,}75 - 134{,}75 = 11{,}0 < Ld = 39{,}3 \quad \text{DNS}$$
$$\bar{y}_{32} - \bar{y}_{12} = 145{,}75 - 57{,}25 = 88{,}5 > Ld = 39{,}3 \quad \text{DS}$$
$$\bar{y}_{22} - \bar{y}_{12} = 134{,}75 - 57{,}25 = 77{,}5 > Ld = 39{,}3 \quad \text{DS}$$

O resultado da otimização indica que deve-se utilizar as placas de material 2 ou 3 (empate técnico) para se obter a voltagem nominal.

Experimentos sem repetição

- Lembrando, o número de GDL do termo de erro vem dado por:

  ab(n-1)

- Se não há repetições do experimento, isto é, se n = 1, não sobram GDL para calcular de modo independente a MQR.

$$MQR = \frac{SQR}{ab(n-1)}$$

Indeterminado se o denominador é zero.

$$F_{cal} = \frac{MQG}{MQR}$$

Logo o F_{cal} também vai ser indeterminado

Experimentos sem repetição

- Contudo, se há motivos para acreditar que a interação AB não é significativa, então:

  E(MQAB) = E(MQR)

- E é possível fazer a análise usando a MQAB como uma estimativa do termo de erro:

Fonte de variação	Soma dos quadrados	GL	Médias quadradas	Teste F
A	SQA	(a-1)	MQA	MQA / MQAB
B	SQB	(b-1)	MQB	MQB / MQAB
Erro (AB)	SQAB	(a-1)(b-1)	MQAB	
Total	SQT	ab-1		

Exemplo

- Um pesquisador acredita que a resistência à tração de certos corpos de prova (CP) de argamassa depende da % de microssílica utilizada na sua fabricação e do operador que confecciona os CPs. Os dados revelaram:

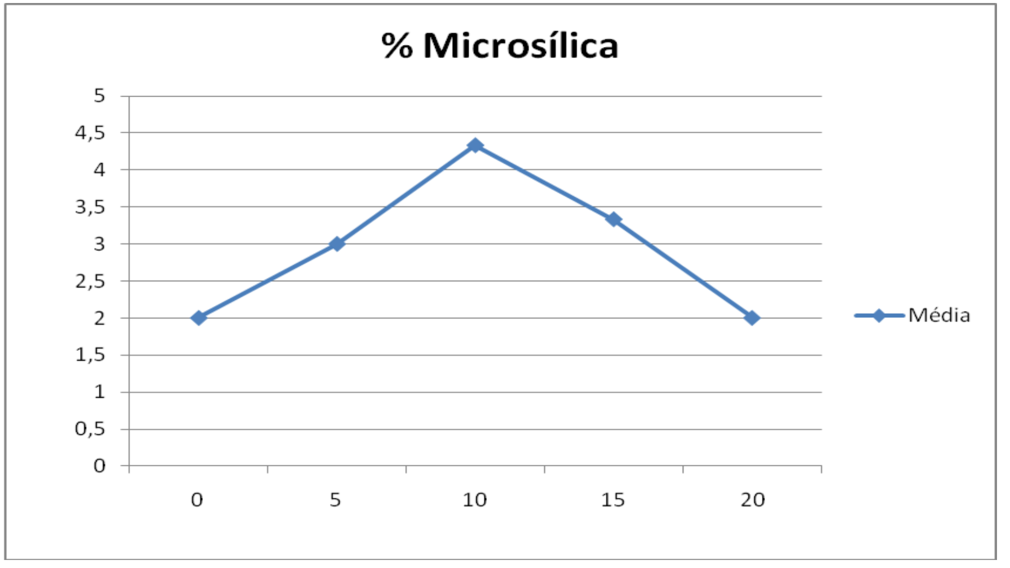
	% de Microssílica					
Operador	0	5	10	15	20	Totais
1	4	5	6	5	3	23
2	1	3	4	3	2	13
3	1	1	3	2	1	8
Totais	6	9	13	10	6	44

Exemplo

Fonte de variação	Soma dos quadrados	GL	Médias quadradas	F calc	F tab
Operador (A)	23,33	2	11,67	46,7	4,46
% Microssílica (B)	11,60	4	2,90	11,6	3,84
Erro (AB)	2,00	8	0,25		
Total	36,93	14			

Os efeitos do operador e do % de microssílica são significativos
Próximo passo: conduzir uma CMM tanto para A quanto para B.

Exemplo



	Média	Diferença				
0	2	0-5	1	>	Ld	0,866025
5	3	5-10	1,3	>	Ld	0,866025
10	4,3	10-15	1,0	>	Ld	0,866025
15	3,3	15-20	1,3	>	Ld	0,866025
20	2					

Como a resistência é do tipo maior-é-melhor, o melhor % de microssílica é 10%

Tópicos próxima aula

- Projetos completamente aleatorizados
- Projetos blocos aleatorizados
- Quadrado latino
- Quadrado greco-latino