



ENGENHARIA DA QUALIDADE A ENG 09008

AULA 3

TEOREMA DO LIMITE CENTRAL INTRODUÇÃO AO CONTROLE ESTATÍSTICO DE PROCESSO

PROFESSOR:

CARLA SCHWENGBER TEN CATEN

Teorema do limite central

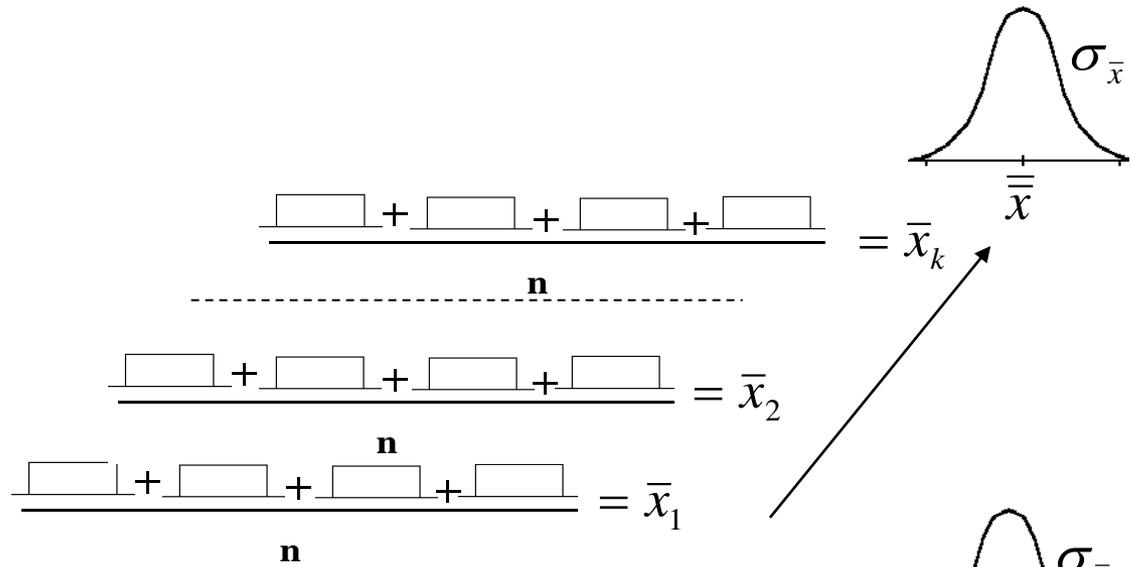
- A soma (e sua média) de n variáveis x_i independentes seguem o modelo da distribuição Normal, qual quer que seja a distribuição das variáveis individuais.
- Distribuições individuais não muito diferentes da Normal tem boa aproximação com $n = 4$ ou 5 .
- Distribuições individuais muito diferentes da Normal, aproximam com $n \geq 30$.

$$x_i = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$
$$\bar{x}_i = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

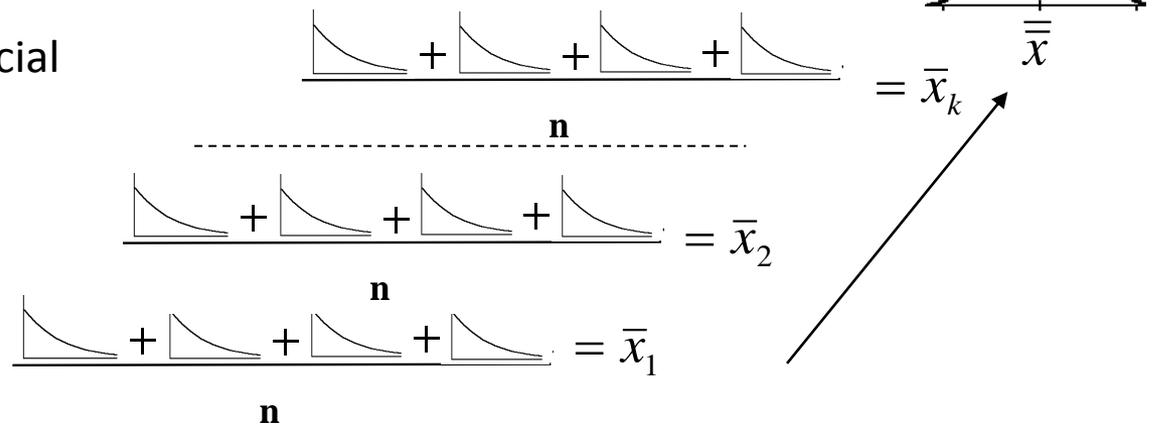


Teorema do limite central

Distribuição Uniforme



Distribuição Exponencial



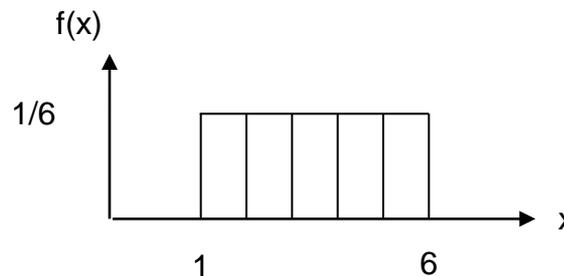
Teorema do limite central

Exemplo 1:

x = lançamento de um dado

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$f(x) = 1/6 \quad \forall x$$

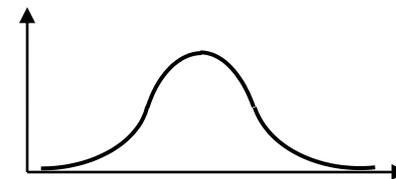


Exemplo 2:

x = média dos lançamentos de dois dados

$$\Omega = \{1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6\}$$

$$f(x) = N(3,5; 1,21^2)$$

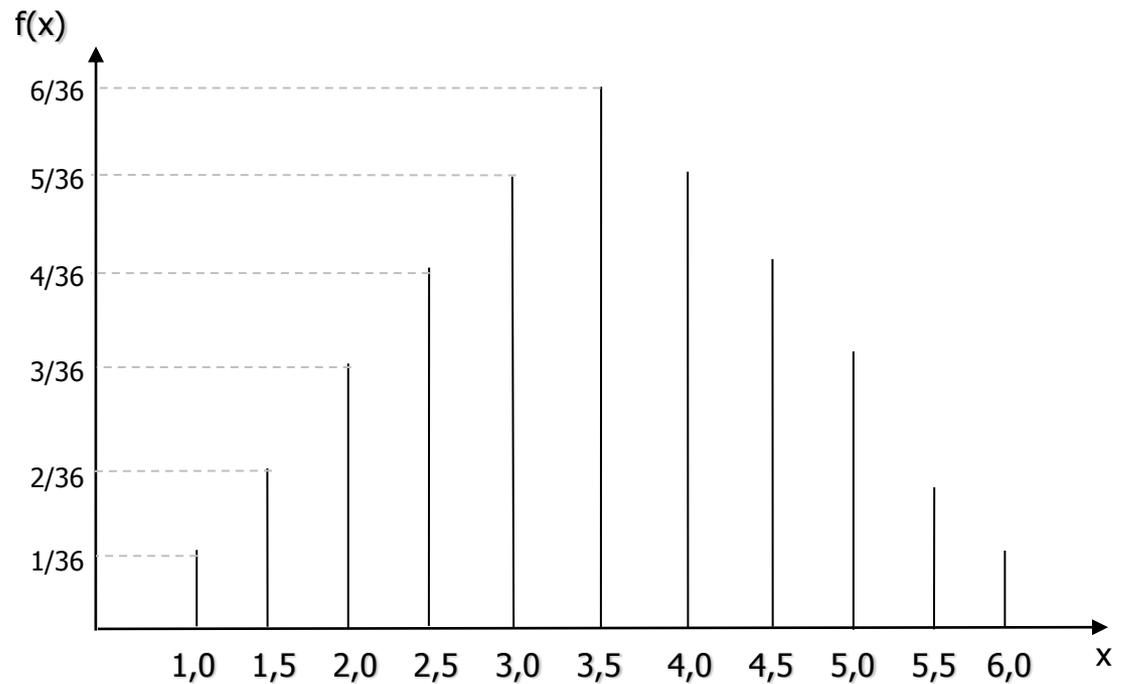


Teorema do limite central

1º dado	2º dado	Soma	Média	1º dado	2º dado	Soma	Média
1	1	2	1,0	5	2	7	3,5
1	2	3	1,5	3	4	7	3,5
2	1	3	1,5	4	3	7	3,5
1	3	4	2,0	2	6	8	4,0
3	1	4	2,0	6	2	8	4,0
2	2	4	2,0	3	5	8	4,0
1	4	5	2,5	5	3	8	4,0
4	1	5	2,5	4	4	8	4,0
3	2	5	2,5	3	6	9	4,5
2	3	5	2,5	6	3	9	4,5
1	5	6	3,0	4	5	9	4,5
5	1	6	3,0	5	4	9	4,5
2	4	6	3,0	4	6	10	5,0
4	2	6	3,0	6	4	10	5,0
3	3	6	3,0	5	5	10	5,0
1	6	7	3,5	5	6	11	5,5
6	1	7	3,5	6	5	11	5,5
2	5	7	3,5	6	6	12	6,0

Teorema do limite central

Média de dois dados	Frequência
1,0	1
1,5	2
2,0	3
2,5	4
3,0	5
3,5	6
4,0	5
4,5	4
5,0	3
5,5	2
6,0	1



Teorema do limite central

CEP trabalha com médias das amostras que tendem à distribuição Normal

Parâmetros e estimadores no CEP

Média:

\bar{x} : representa a média da amostra

$\bar{\bar{x}}$: representa a média das médias amostrais

μ : representa a média dos valores individuais da população

Desvio-padrão:

S : representa o desvio-padrão dos valores individuais da amostra ($n < 30$)

σ : representa o desvio-padrão dos valores individuais da população

$\sigma_{\bar{x}}$: representa o desvio-padrão das médias amostrais

Tamanho de amostra:

n : representa o tamanho da amostra

N : representa o tamanho de uma série de k amostras de tamanho n

Teorema do limite central

Exemplo: um pesquisador deseja saber média da idade dos alunos de pós-graduação. A população dos alunos é:

29	35	28	43	35	21	49	41
39	28	35	52	39	35	35	26
55	42	57	60	44	40	38	46
34	50	32	36	28	20	36	23

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{29 + \dots + 23}{32} = 37,84$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{(29 - 37,84)^2 + \dots + (23 - 37,84)^2}{32}} = 10,03$$

Teorema do limite central

Supondo que não fosse possível analisar a população inteira e os dados fossem coletados por amostras de tamanho $n = 8$ ($k = 4$ corridas)

	29	35	28	43	35	21	49	41		
	39	28	35	52	39	35	35	26		
	55	42	57	60	44	40	38	46		
	34	50	32	36	28	20	36	23		
média amostral (\bar{x})	39,00		42,88		32,75		36,75		37,84	médias das médias ($\bar{\bar{x}}$)
desvio amostral (S)	9,62		12,10		8,88		8,97		4,23	desvio das médias ($\sigma_{\bar{x}}$)

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{k} = \frac{39,00 + \dots + 36,75}{4} = 37,84$$

Teorema do limite central

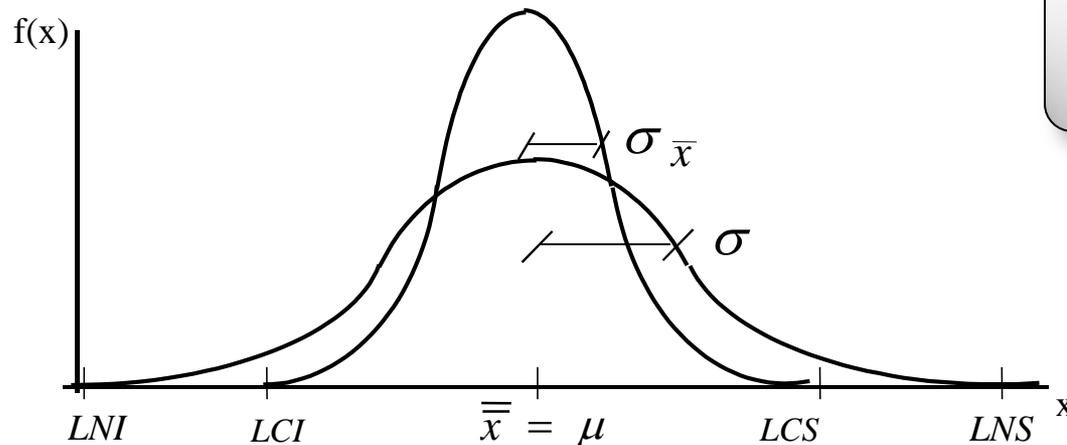
Supondo que não fosse possível analisar a população inteira e os dados fossem coletados por amostras de tamanho $n = 4$ ($k = 8$ corridas)

	29	35	28	43	35	21	49	41		
	39	28	35	52	39	35	35	26		
	55	42	57	60	44	40	38	46		
	34	50	32	36	28	20	36	23		
média amostral (\bar{x})	39,25	38,75	38,00	47,75	36,50	29,00	39,50	34,00	37,84	médias das médias ($\bar{\bar{x}}$)
desvio amostral (S)	11,27	9,43	12,99	10,47	6,76	10,03	6,45	11,22	5,33	desvio das médias ($\sigma_{\bar{x}}$)

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{k} = \frac{39,25 + \dots + 34,00}{8} = 37,84$$

Teorema do limite central

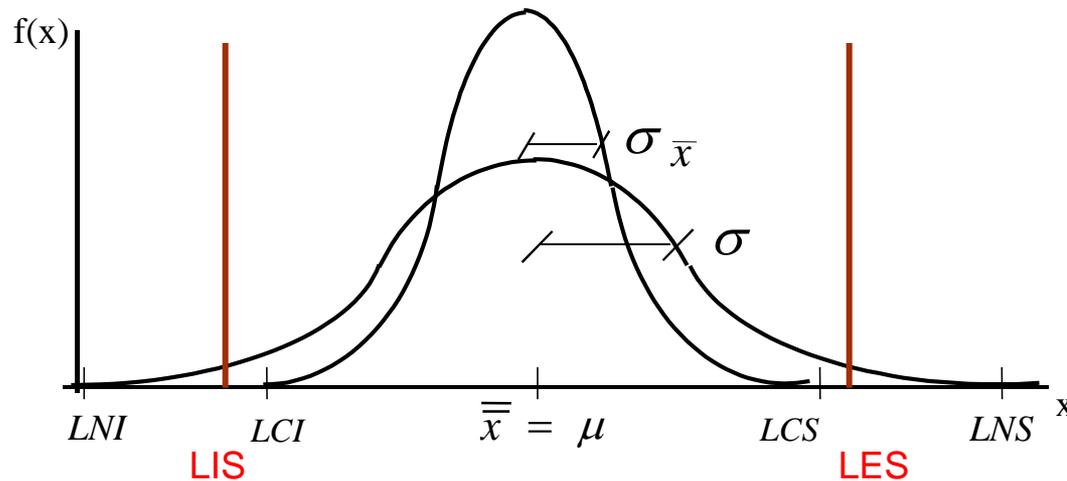
- Média das médias amostrais é igual a média dos valores individuais. $\bar{\bar{x}} = \mu$
- Desvio-padrão das médias é menor do que o desvio-padrão dos valores individuais na razão de $1/\sqrt{n}$. $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$



Maior o número de corridas (k) analisadas, melhor é a estimativa.

Teorema do limite central

- Limites naturais: limites da distribuição dos valores individuais
- Limites de controle: limites da distribuição das médias
- Limites de especificação: determinado pelo cliente



Introdução ao CEP

Controle Estatístico de Processo:

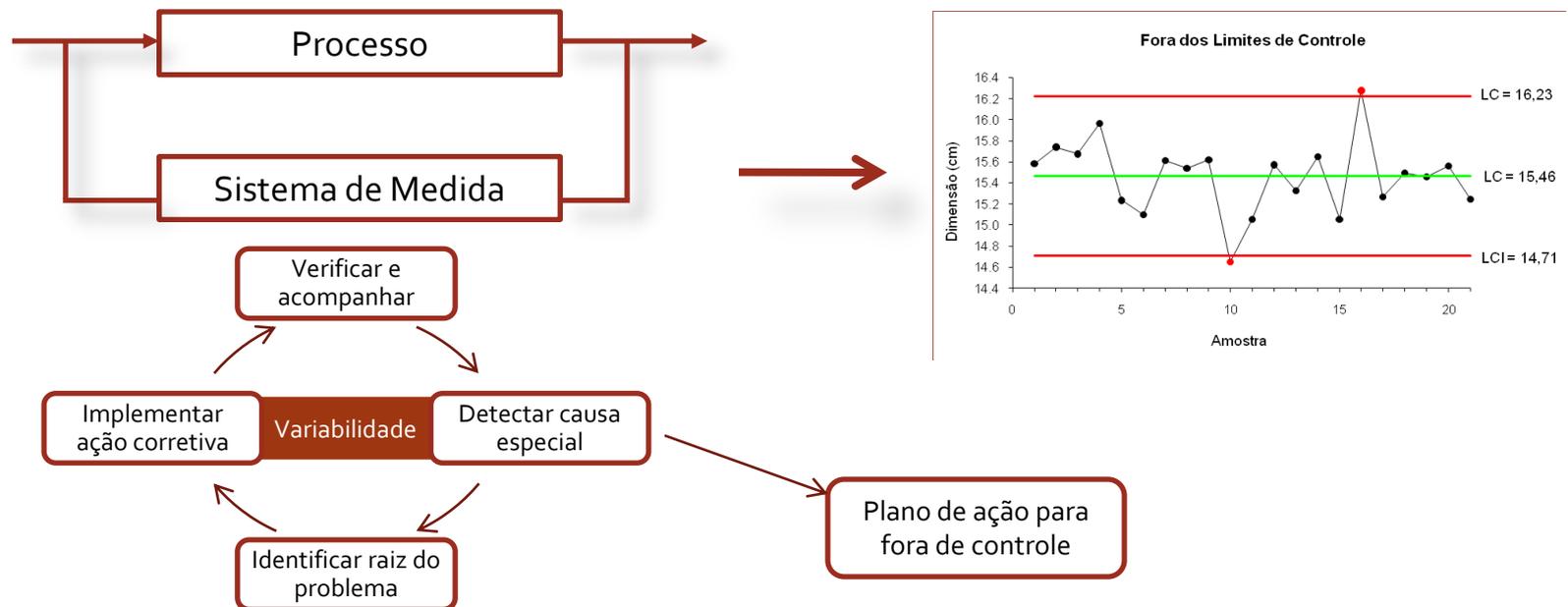
- Conjunto de ferramentas de resolução de problemas para obter:
 - estabilidade (eliminação de causas especiais) dos processos
 - melhoria da sua capacidade

7 Ferramentas do CEP

- Histograma
- Folha de controle
- Gráfico de Pareto
- Diagrama de causa e efeito
- Diagrama de concentração de defeito
- Diagrama de dispersão
- Carta de controle → Foco da disciplina

Definição de Carta de Controle

- Sistema de inspeção por amostragem do processo
- Representa graficamente a variável de resposta ou fator controlável que influencia na característica da qualidade versus tempo
- Monitorar a presença de causas especiais (causas que não são comuns ao processo e podem prejudicar a qualidade do produto/serviço)



Passos iniciais para a implantação

1) Estabelecer um ambiente favorável à ação

- Preparar as pessoas
- Definir responsáveis
- Assegurar suporte gerencial

2) Definir o processo

- Entender o processo, pessoas, procedimentos, matérias-primas e equipamentos envolvidos
- Identificar as etapas do processo
- Identificar os fornecedores e clientes
- Identificar os parâmetros do processo, variáveis de resposta e as características de qualidade

Passos iniciais para a implantação

3) Determinar as características a serem monitoradas:

- Enfatizar o que é mais importante para o cliente
- Identificar as características críticas para segurança/uso
- Identificar características com problemas crônicos
- Sempre que possível, escolher monitorar parâmetros do processo e não características finais de qualidade
- Estudar possíveis correlações entre os parâmetros do processo e as características de qualidade

Projeto de Experimentos é a ferramenta adequada para essa tarefa

Passos iniciais para a implantação

4) Definir o sistema de medição

- Determinar qual informação, onde e com que frequência coletar
- Definir o modo de registro das informações
- Determinar a exatidão e a resolução necessárias dos instrumentos de medição
- Definir como será a calibração dos instrumentos

5) Minimizar a variabilidade desnecessária

- Identificar causas externas de variabilidade que são óbvias e eliminar estas causas antes de iniciar o estudo

▮ Variabilidade

A variabilidade está sempre presente em todos os produtos mesmo em condições normais de operação.

Se compararmos duas unidades quaisquer, produzidas pelo mesmo processo, elas jamais serão exatamente idênticas.

Contudo, a diferença pode ser:

- Pequena: sendo praticamente imperceptível (causa comum)
- Grande: provocando o aparecimento de produtos não-conformes/defeituosos (causas especiais)

A carta de controle cria um critério estatístico para separação entre causa comum e especial e atuação no processo quando causas especiais estão presentes.

|| Causas comuns

- Resulta da variabilidade presente mesmo em condições normais de operação do processo
- São diferenças mínimas peça-a-peça devida a pequenas causas de variação que atuam de forma aleatória no processo, gerando uma variabilidade inerente no processo
- Em geral só podem ser resolvidas por uma ação global sobre o sistema
- Os operadores estão em boa posição para identificá-las, mas a sua correção exige decisão gerencial

|| Causas comuns

- A correção pode não se justificar economicamente
- Um processo que apresenta apenas causas comuns atuando é dito um processo estável ou sob controle, pois apresenta sempre a mesma variabilidade ao longo do tempo
- Causas comuns:
 - pequenas imperfeições no equipamento,
 - design inadequado de um produto,
 - processos que estão funcionando mas não estão otimizados
 - compra sistemática de materiais com baixa qualidade
 - inexistência de treinamento
 - falta de padronização das operações

|| Causas especiais

- As causas especiais são causas que não seguem um padrão aleatório e por isso também são chamadas de causas assinaláveis (falhas de operação)
- Elas fazem com que o processo saia fora de seu padrão natural de operação e têm um efeito indesejável significativo sobre o desempenho do processo, por isso devem ser identificadas e neutralizadas

■ Causas especiais

- Causas especiais em geral são corrigidas por ação local e, por isso, são de responsabilidade dos operadores (apesar de algumas vezes a gerência estar em melhor posição para resolver o problema).
- A eliminação dessas causas se justifica economicamente
- Causas especiais provêm geralmente de:
 - Máquina ajustada ou operada de maneira inadequada
 - Alteração gradual no processo – falta de manutenção (tendências)
 - Erros do operador
 - Lote de matéria-prima com problema
 - Quebra de equipamento de medição

Causas: Comuns x Especiais

ASPECTO	CAUSAS ESPECIAIS	CAUSAS COMUNS
Investimento	Pequeno	Grande
Visibilidade do problema	Grande - A natureza súbita chama a atenção de todos	Pequena - A natureza contínua faz com que todos se acostumem ao problema
Ação Requerida	Restabelecer o nível anterior	Mudar para nível melhor
Dados	Simple, coleta rotineira e muito freqüente	Complexos, coleta especial e pouco freqüente
Análise	Simple e feita por pessoal próximo ao processo	Complexa e feita por pessoal técnico
Responsabilidade pela ação	Operadores (pessoal próximo ao processo)	Pessoal da gerência

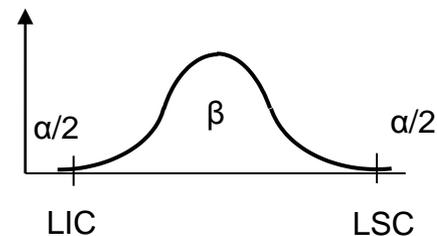
Variabilidade

A meta de um sistema de controle do processo é permitir as decisões corretas referentes a quando agir sobre o processo.

Excesso ou falta de ação são prejudiciais.

- Excesso de ação- atuação em causas comuns como se fossem causas especiais pode levar a um aumento da variação, além de representar um custo desnecessário (erro tipo I, probabilidade α , ou risco do produtor)
- Falta de ação - causas especiais podem passar como despercebidas (causas comuns) incorporando-se ao resultado do processo, ou seja, tornando aceitável o que deveria ser rejeitado (erro tipo II, probabilidade β , ou risco do cliente)

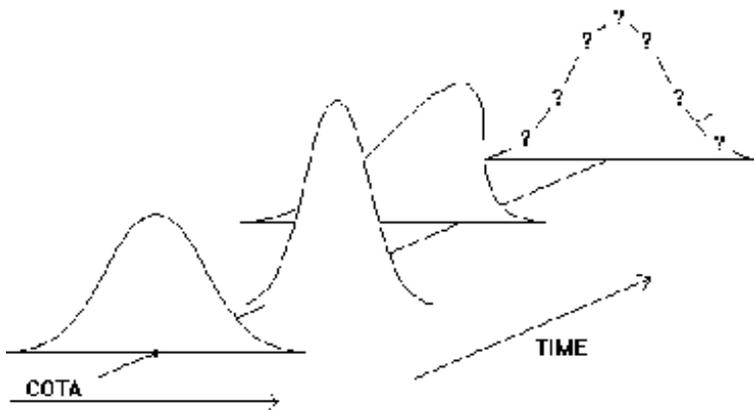
$$\beta = 1 - \alpha$$



Causas: Comuns x Especiais

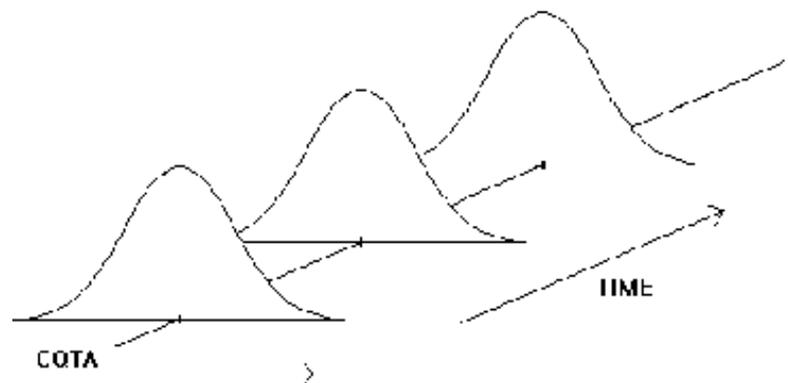
Causas especiais

Se causas especiais estão presentes, o comportamento do processo não é estável, e não é previsível



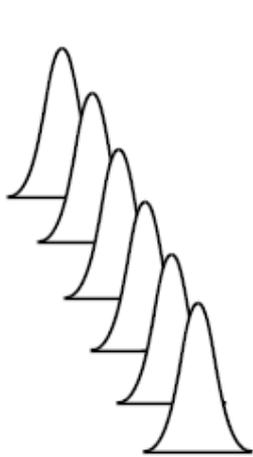
Causas comuns

Se apenas as causas comuns estão presentes, o comportamento do processo é estável e previsível



Causas: Comuns x Especiais

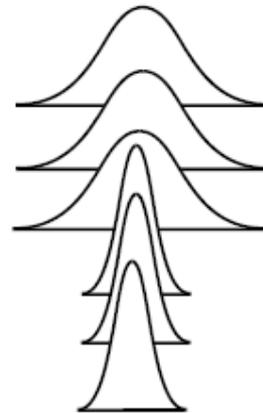
Exemplos de processos fora de controle – presença de causa especial



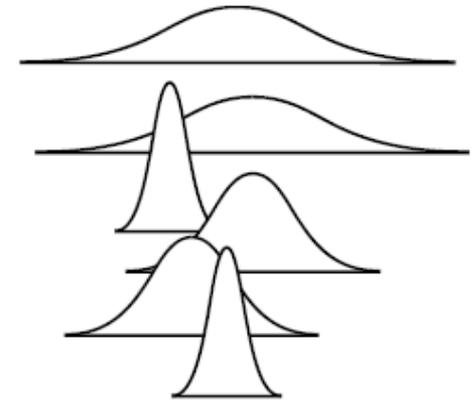
Tendência na
média
Variabilidade
constante



Deslocamento na
média
Variabilidade
constante



Média estável
Aumento da
variabilidade

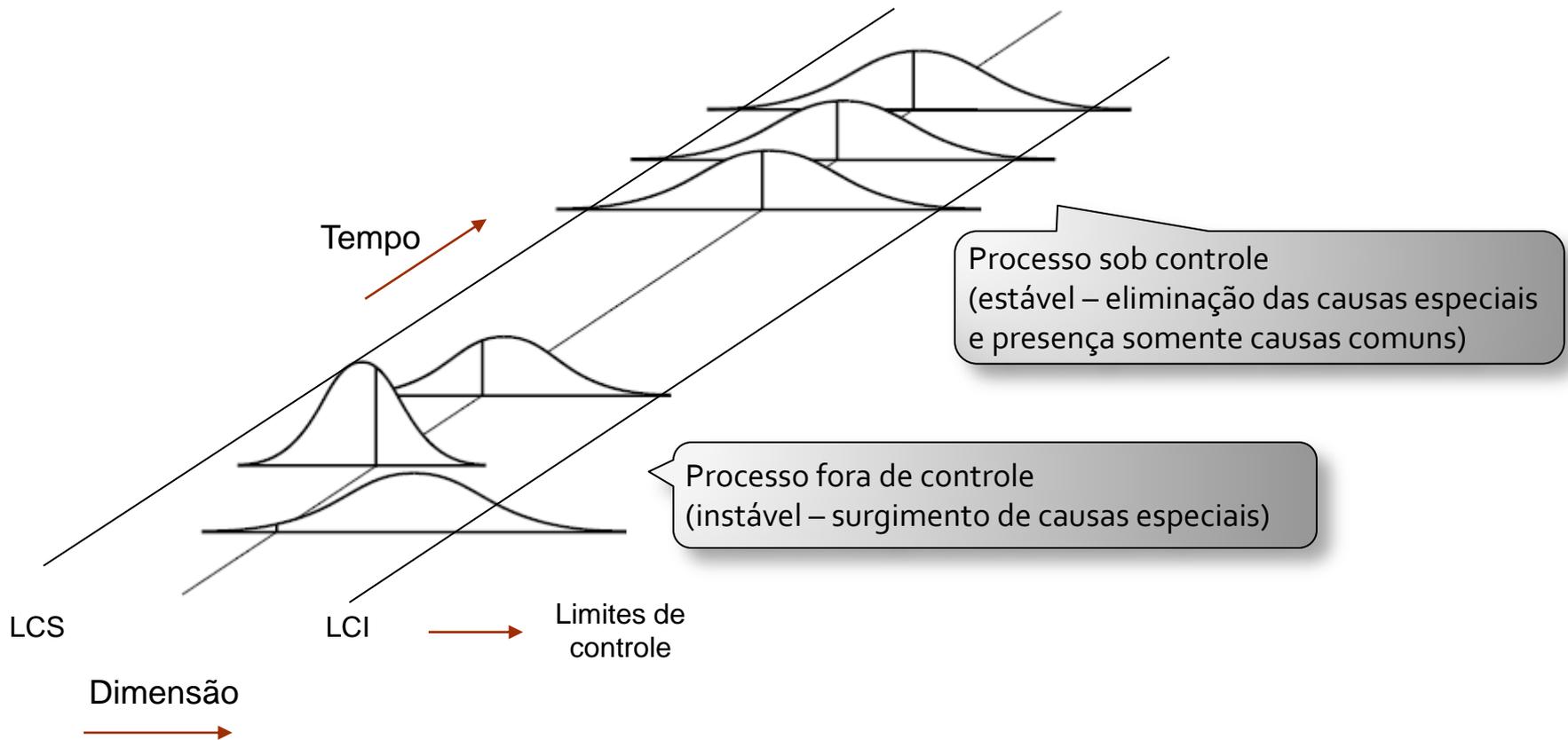


Média instável
Variabilidade instável

As cartas de controle são aos pares: uma para monitorar a tendência central e outra para monitorar a variabilidade

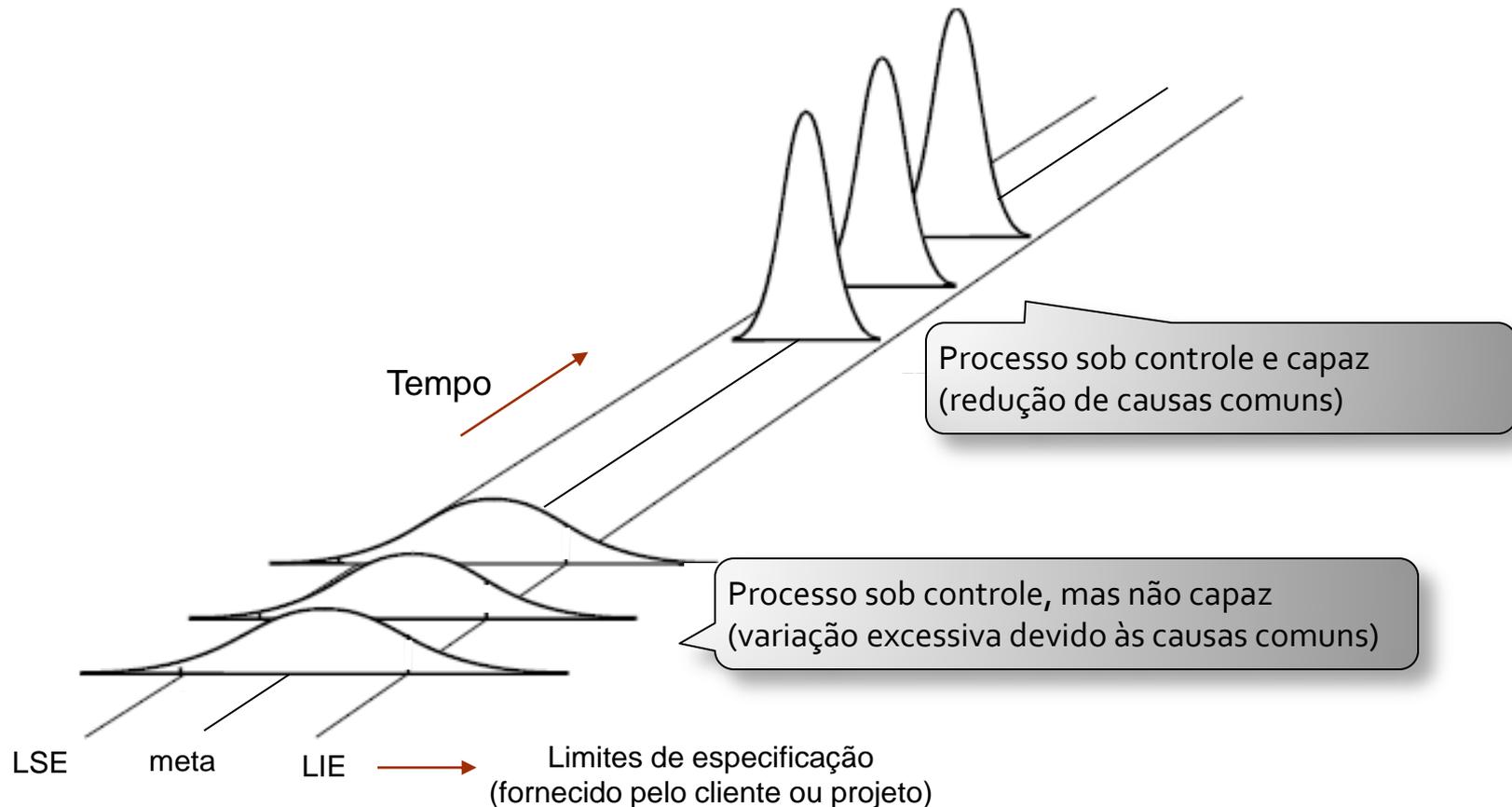
Causas: Comuns x Especiais

1) Estabilidade do Processo – Eliminação das causas especiais -
responsabilidade do operador



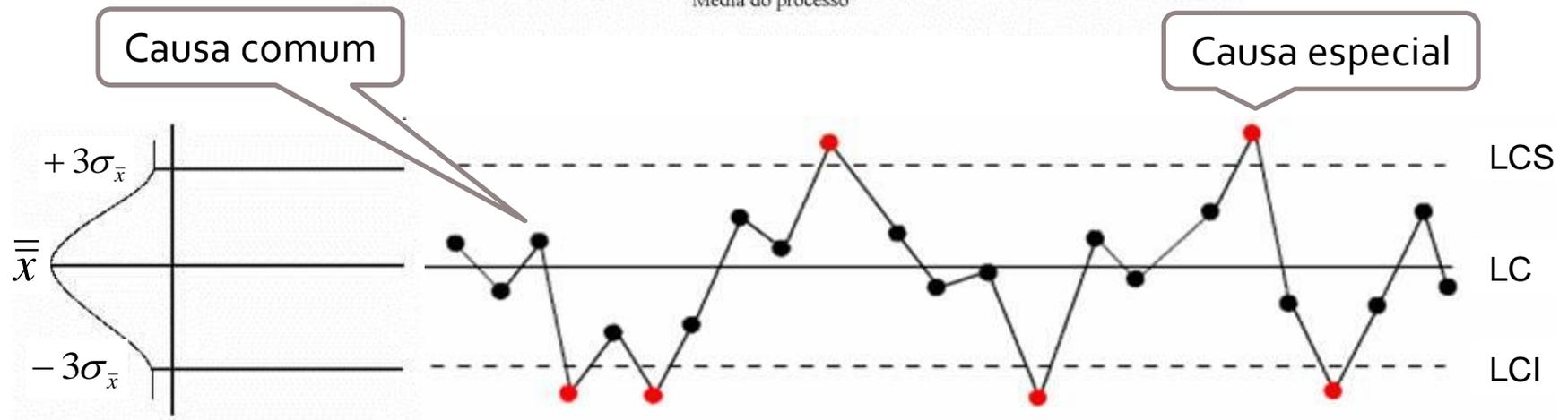
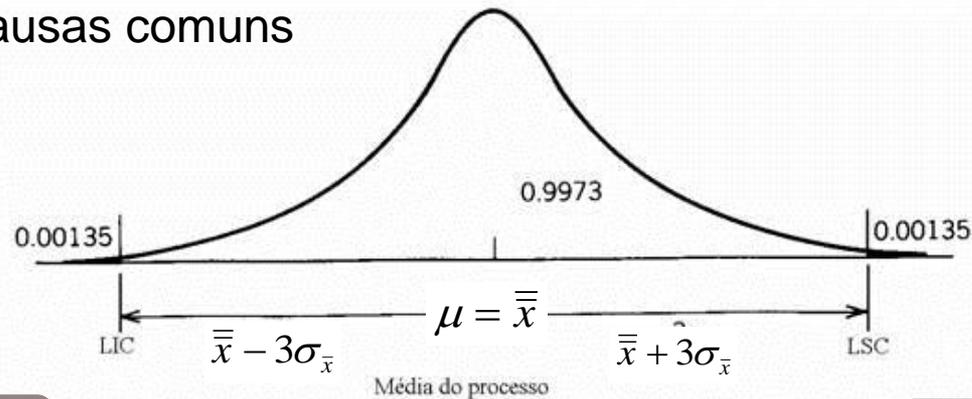
Causas: Comuns x Especiais

- 2) Capacidade de Processo (atendimento às especificações do cliente).
Somente quando o processo estiver sob controle (sem causas especiais)
Redução das causas comuns - responsabilidade da gerência



Cálculo dos limites de Controle

O cálculo dos limites de controle considera apenas a variabilidade associada às causas comuns



Teste de hipótese $H_0 : \bar{x}_i = \bar{\bar{x}}$ causa comum
a cada amostra $H_1 : \bar{x}_i \neq \bar{\bar{x}}$ causa especial

Escolha de Limites de Controle

- $\uparrow L \downarrow$ erro tipo I (α) – risco do ponto cair fora dos limites de controle quando o processo está sob controle (condições normais de operação)
 - $P_{\alpha/2}(L \geq 3) = 0,00135$ e $P_{\alpha/2}(-3 \leq L) = 0,00135$
 - $P_{\alpha}(-3 \leq L \cup L \geq 3) = 0,0027$ ou seja 27 pontos em 10.000 serão considerados como fora de controle (alarmes falsos)
- $\uparrow L \uparrow$ erro tipo II (β) – risco do ponto cair dentro dos limites de controle quando o processo está fora de controle (não-detecção)
 - $P_{\beta}(-3 \leq L \leq 3) = 0,9973$ ou seja 9.973 pontos em 10.000 serão considerados em controle

Teste de hipótese
a cada amostra

$$H_0 : \bar{x}_i = \bar{\bar{x}}$$

$$H_1 : \bar{x}_i \neq \bar{\bar{x}}$$

$$LCS = \mu + L_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}} \cong \mu + L_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Linha Central} = \mu = \bar{\bar{x}}$$

$$LCI = \mu - L_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}} \cong \mu - L_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Região onde H_0
não pode ser
rejeitada

Escolha de Limites de Controle

Exemplo: em uma fábrica de anéis de pistão para motores de automóveis, a característica crítica é o diâmetro interno do anel. Historicamente, o processo apresenta $\mu = 74$ mm e $\sigma = 0,01$ mm. A amostragem ocorre a cada hora com tamanho $n = 5$. Quais são os limites de controle supondo $L = 3$ sigma?

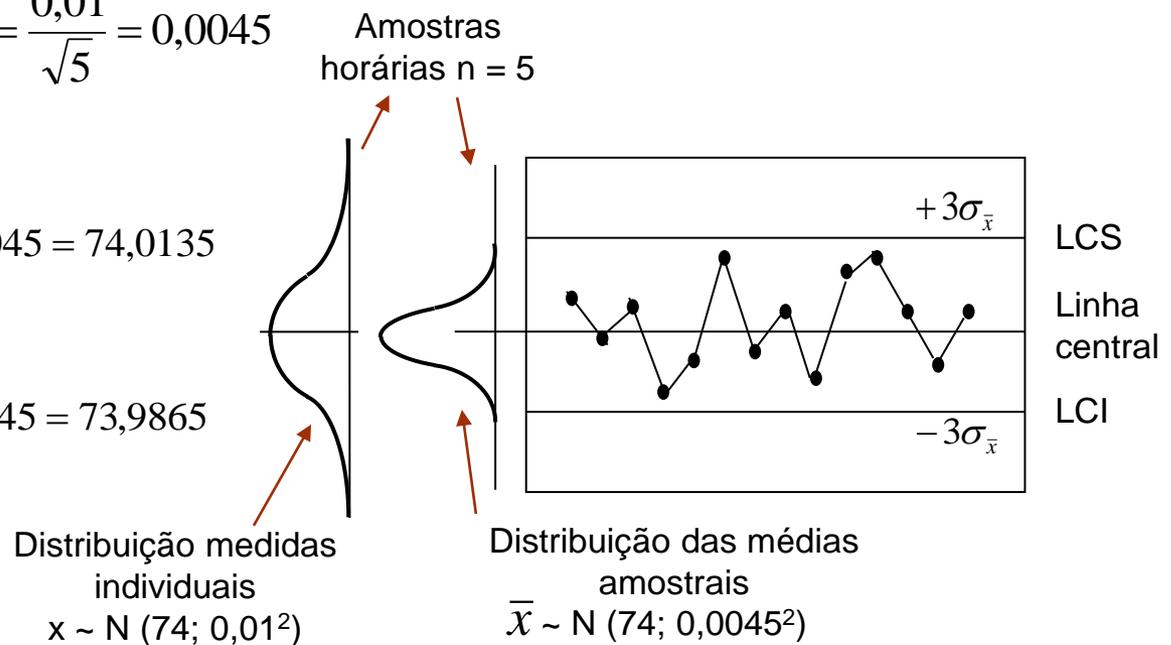
$$LC = \mu \pm 3\sigma_{\bar{x}} \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,01}{\sqrt{5}} = 0,0045$$

$$LC = \mu \pm 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$LCS = 74 + 3 \frac{0,01}{\sqrt{5}} = 74 + 3 \cdot 0,0045 = 74,0135$$

$$\text{Linha Central} = 74$$

$$LCI = 74 - 3 \frac{0,01}{\sqrt{5}} = 74 - 3 \cdot 0,0045 = 73,9865$$



|| Tamanho e freqüência de amostragem

↑ n ↑ p (detectar pequenas mudanças)

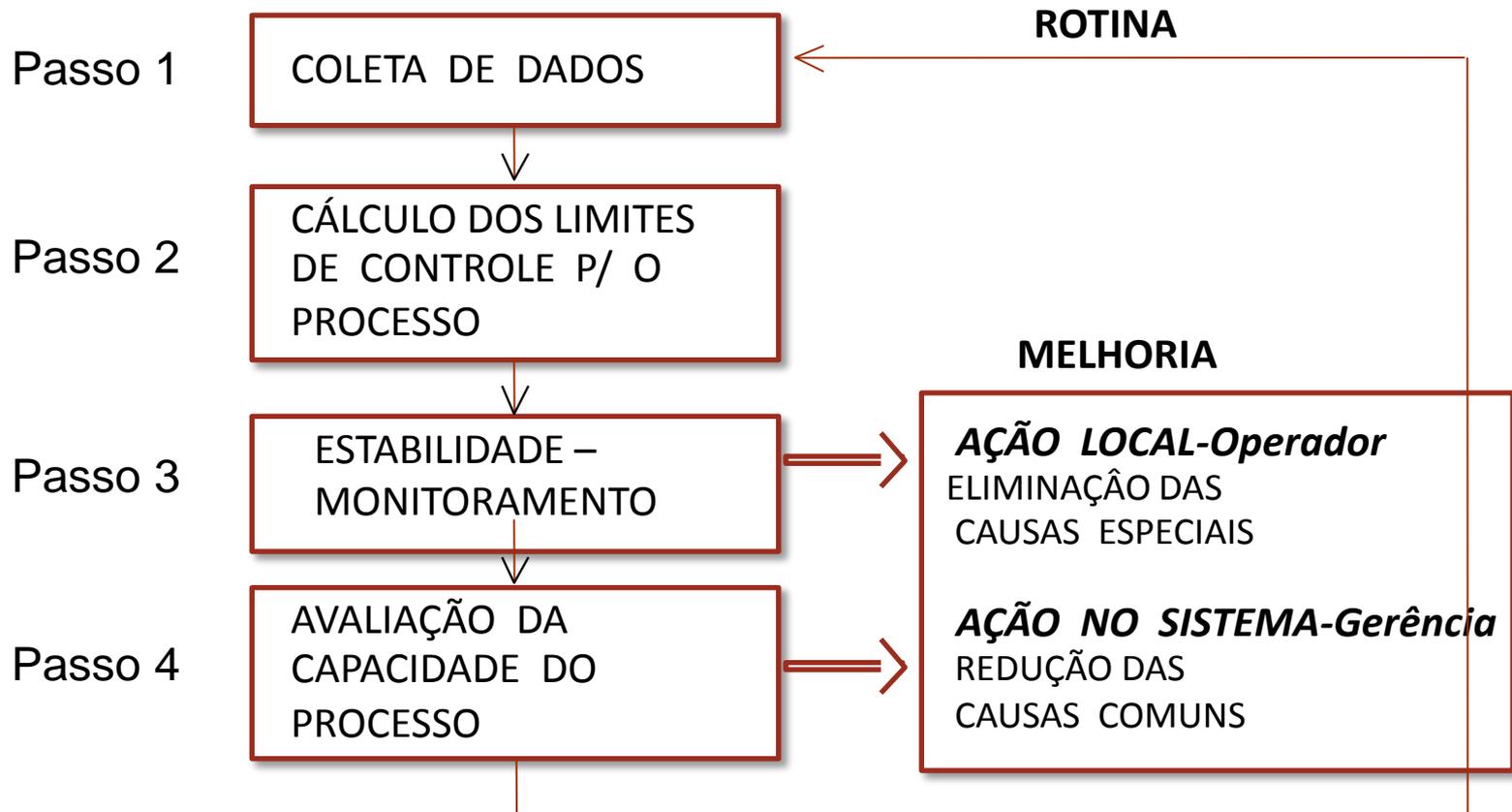
↑ freqüência de amostragem ↑ p (detectar mudanças)

Ideal amostras grandes com alta freqüência → não é viável economicamente

Dicotomia:

- ↓ n ↑ freqüência → mais utilizado na indústria
- ↑ n ↓ freqüência

Procedimento iterativo de melhoria



|| Procedimento iterativo de melhoria

Passo 1 – Coleta de dados

O processo é colocado em funcionamento e se coleta dados referentes à característica em estudo. Esses dados podem ser:

- Dimensões de uma peça usinada
- Número de defeitos em um circuito impresso
- Viscosidade de um produto químico
- Resistência de um componente
- Peso de um refrigerante

Procedimento iterativo de melhoria

Passo 2 – Cálculo dos limites de controle

- Calcula-se a média, o desvio padrão amostral e então os limites de controle poderão ser definidos

$$LCS = \mu + L_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}} \cong \mu + 3\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Linha Central} = \mu$$

$$LCI = \mu - L_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}} \cong \mu - 3\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Procedimento iterativo de melhoria

Passo 3 – Avaliação da Estabilidade - Monitoramento

- Essa é a tarefa do dia-a-dia (rotina). Os dados continuam sendo coletados e são plotados na carta de controle. Enquanto apenas as causas comuns estão presentes, o esperado é que os pontos plotados permaneçam dentro dos limites de controle.
- Um ponto fora dos limites de controle é uma indicação da provável presença de causas especiais, e deve ser investigado. As causas especiais devem ser eliminadas.

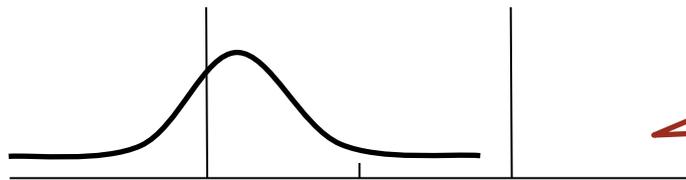
Procedimento iterativo de melhoria

Passo 4 – Avaliação da capacidade

- Após a eliminação de todas as causas especiais, o processo estará funcionando em controle estatístico. Então, podemos avaliar sua real capacidade.
- O processo pode ser representado por uma distribuição de probabilidade: forma, tendência central (média) e dispersão (desvio-padrão)
- A capacidade é a habilidade do processo em atender as especificações do cliente.

Procedimento iterativo de melhoria

Passo 4 – Avaliação da capacidade

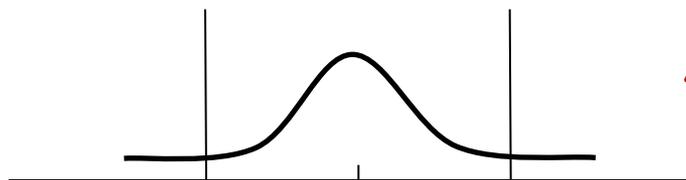


LIE

LSE

Processo não capaz e descentralizado

- Ajuste de máquina



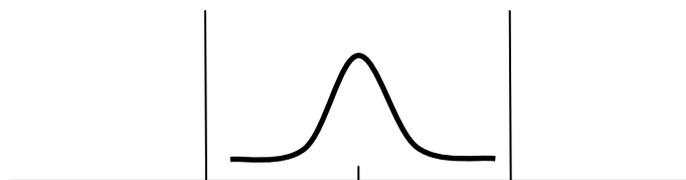
LIE

LSE

Processo não capaz e centralizado

Ordem da realização das estratégias

- Programa de treinamento, revisão de procedimentos
- Troca de fornecedor (matéria prima de maior qualidade)
- Investigação de novos parâmetros de processo (projeto de experimentos)
- Re-design do produto (projeto de experimentos pode auxiliar)
- Troca de processo (nova tecnologia)
- Negociação com o cliente por limites mais largos



LIE

Meta

LSE

Processo capaz e centralizado

|| Vantagens das cartas de controle

O emprego correto das cartas de controle:

- Permite que o monitoramento do processo seja executado pelos próprios operadores
- Fornece uma distinção clara entre causas comuns e causas especiais
- Serve de guia para ações locais ou gerenciais
- Os índices de capacidade do processo (C_p e C_{pk}) fornecem uma linguagem comum para discutir o desempenho do processo
- O CEP auxilia o processo a atingir:
 - alta qualidade
 - baixo custo unitário
 - alta capacidade efetiva
 - consistência e previsibilidade

|| Tópicos da próxima aula

- Cartas de controle \bar{x} e R