

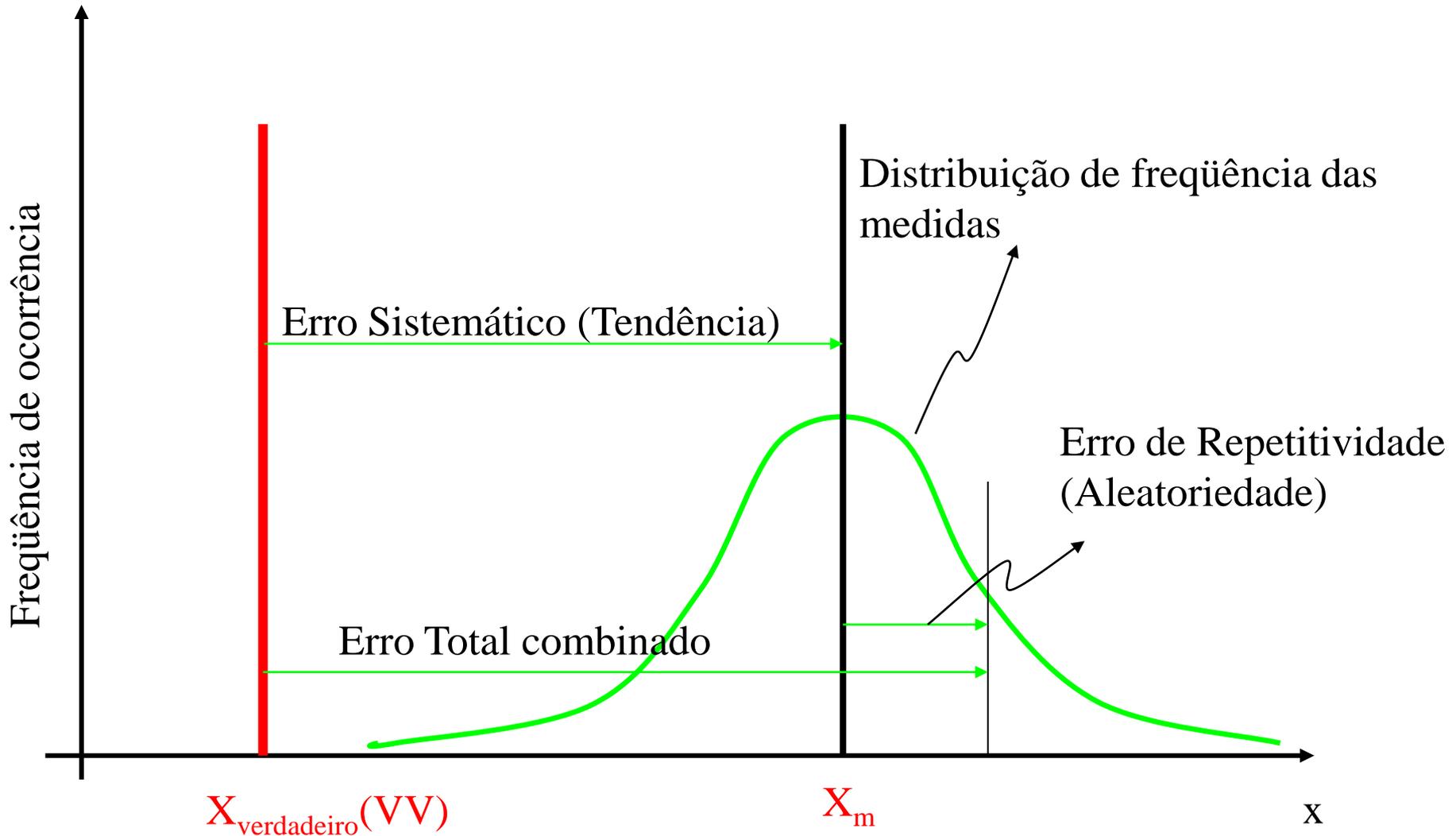
METROLOGIA E ENSAIOS

Incerteza de Medição

Prof. Alexandre Pedott

pedott@producao.ufrgs.br

Incerteza da Medição



Incerteza da Medição

- A incerteza está relacionada a um valor de medição e não ao valor verdadeiro do mensurando. O resultado da medição é apenas a melhor estimativa do valor verdadeiro, que na ausência de efeitos sistemáticos, é obtido pela média aritmética de N medições repetidas do mesmo mensurando.
- Caracteriza uma faixa de dispersão ou intervalo e não um valor pontual. Não deve ser confundida com um “erro.

Incerteza da Medição

- É a dúvida remanescente associada ao resultado da medição. Mede o grau de desconhecimento sobre aquilo que está sendo medido.
- É um intervalo de valores que podem ser atribuídos fundamentadamente ao mensurando, de forma fundamentada e realista, não devendo ser entendida como uma “faixa de segurança”.

Incerteza da Medição

- É a faixa de valores dentro da qual deve se situar o valor verdadeiro do mensurando.

$$RM = (RB \pm IM) \text{ unidade}$$

Associado a um valor probabilístico

- Resultado base é a estimativa do valor do mensurando que, acredita-se, mais se aproxime do seu valor verdadeiro.
- Incerteza da medição é o tamanho da faixa simétrica, e centrada em torno do resultado base, que delimita a faixa onde se situam as dúvidas associadas à medição.

Termos e Definições

- Incerteza de medição: parâmetro associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando.
- Incerteza padrão: incerteza do resultado de uma medição expressa como um desvio padrão.
- Incerteza padrão combinada: incerteza padrão do resultado de uma medição, quando este resultado é obtido por meio dos valores de várias outras grandezas, sendo igual a raiz quadrada positiva de uma soma de termos, que constituem as variâncias e covariâncias destas outras grandezas, ponderadas de acordo com quanto o resultado da medição varia com mudanças nestas grandezas.

Importância

- Na calibração de equipamentos: instrumentos e padrões, para verificar se os mesmos encontram-se dentro das tolerâncias definidas.
- Em ensaios: para verificar se o resultado do ensaio pode ser aprovado ou não.
- Metrologia legal: para verificar a conformidade de resultados de medições com limites de tolerâncias legais.
- Na tomada de decisão: reduzir o risco de erro de aprovar ou rejeitar uma amostra.
- Pode ser um diferencial competitivo entre laboratórios.

Expressão da Incerteza de Medição

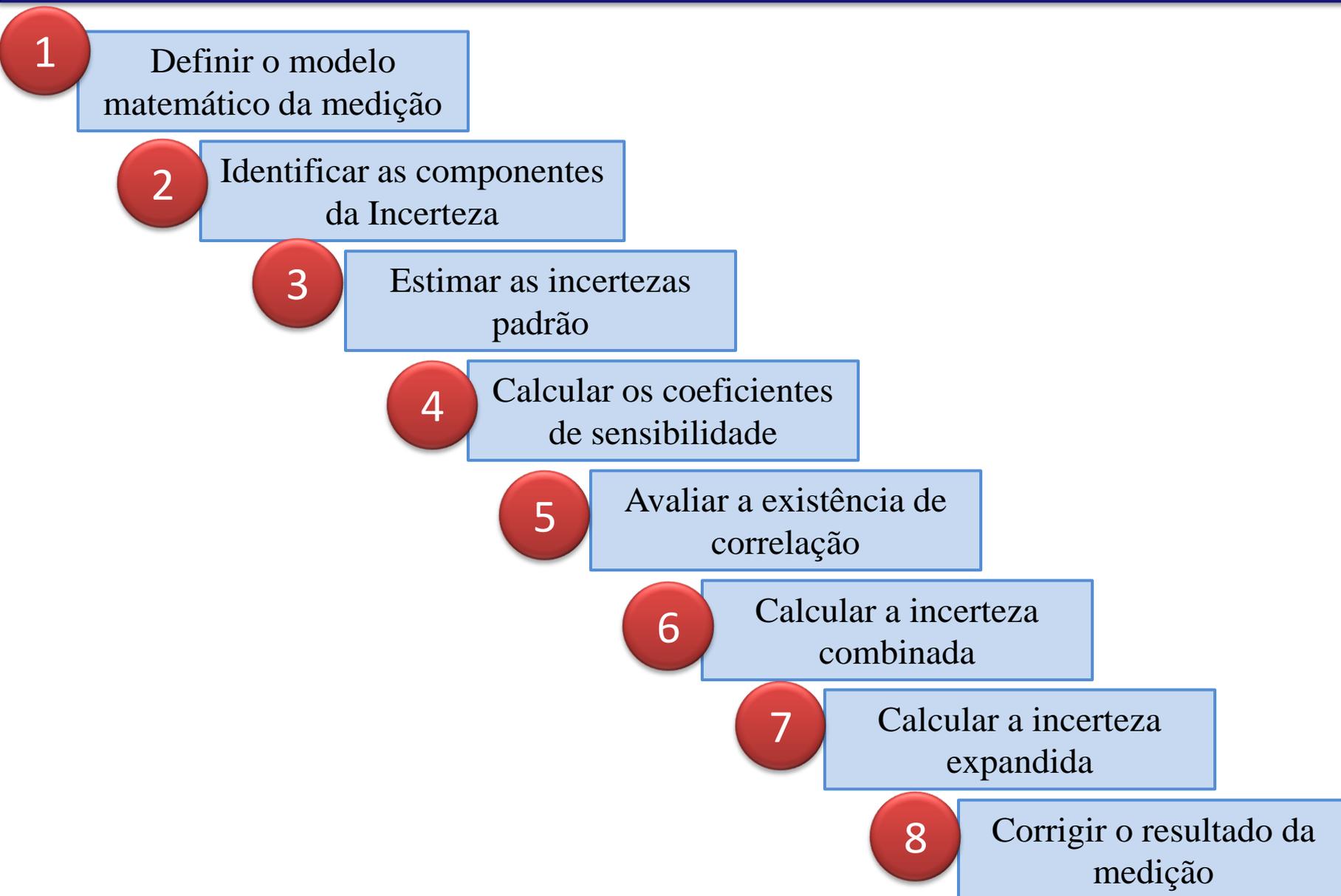
- ISO GUM – *Guide to Expression of Uncertainty in Measurement*
- Monte Carlo – Simulação
- Integração Numérica

Seminários

Grupo	Tema	Fatores / Medidas
1	Ensaio	Climático (Temperatura, umidade)
2	Calibração	Relógio Comparador
3	Calibração	Vibração
4	Ensaio	Resistência Mecânica

Escolher uma característica de qualidade de um produto.
Apresentação dia: 24/10/2012

Expressão da Incerteza de Medição – ISO GUM



Planilha de Incerteza

Grandeza	Estimativa (média)	Distribuição de Probabilidade	Incerteza Padrão	Coefficiente de Sensibilidade	GDL
X_1	x_1		$u(x_1)$	C_1	v_1
X_2	x_2		$u(x_2)$	C_2	v_2
X_N	x_N		$u(x_N)$	C_3	v_N
Incerteza Combinada		Fator de Abrangência		Incerteza Expandida	
$u_C(y)$		k_p		U	

Modelo Matemático

1

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Y é a grandeza do mensurando

X_i são as grandezas que influenciam a medição de Y .

$$\text{Modelo para calibração: } \mathbf{E} = \mathbf{I} - \mathbf{VV}$$

A incerteza está associada ao mensurando (\mathbf{I}) e ao padrão (\mathbf{VV}).

$$\text{Modelo para ensaio: } \boldsymbol{\sigma} = f(\mathbf{F}, \mathbf{A}) = \mathbf{F} / \mathbf{A}$$

A incerteza está associada a medição da força F e da área da seção transversal A .

Componentes de Incerteza

2

São incertezas associadas a:

- ✓ Condições ambientais;
- ✓ avaliador;
- ✓ Equipamentos;
- ✓ padrões;
- ✓ Método de medição;
- ✓ amostragem.

As componentes devem aparecer no modelo.

Diagrama de Causa e Efeito das componentes.

Componentes de Incerteza

2

EM

- Desvio padrão da série de medições
- Efeito da interpolação
- Efeito da Resolução

Padrão de referência

- IM na calibração do BP
- Erro do BP
- Resolução

Fontes de incerteza na calibração de **micrômetro analógico**

Paralelismo -

- Afastamento da temperatura de referência

- Diferença de temperatura entre BP e EM

Efeitos geométricos

Temperatura

Fontes de Incerteza

2

Desvio padrão da média de medições repetidas.

Incerteza da calibração do padrão – incerteza herdada.

Deriva (estabilidade) dos padrões: a variação do padrão no intervalo entre suas duas últimas calibrações.

Incerteza do fator de correção para erros sistemáticos do padrão.

Erro máximo admissível para o padrão.

Efeito da resolução finita de leitura dos equipamentos.

Efeito das condições ambientais (desvio de temperatura).

Histerese: a indicação de alguns equipamentos pode variar quando as medições são realizadas no sentido ascendente ou descendente – média do avanço – média do retorno.



O cálculo da incerteza segue a “Lei da propagação das Incertezas”. A incerteza de cada componente do ensaio ou calibração é propagada para a obtenção da incerteza final da medição através de uma expansão de Série de Taylor, truncada geralmente em primeira ordem.

Supõe-se, para a aplicabilidade do Teorema do Limite Central, que a medição e a sua respectiva incerteza possuem uma função densidade de probabilidade (FDP) normal, ou *t-Student* para pequenas amostras.

Pressupõem-se observações idêntica e independentemente distribuídas, com médias e variâncias constantes.

A estabilidade do sistema de medição deve ser assegurada.

Estimativas da Incerteza Padrão

3

As incertezas associadas a cada componente devem ser determinadas.

Tipo A – A incerteza padrão é expressa como um desvio padrão da distribuição de valores medidos.

Tipo B – A incerteza padrão é expressa como um desvio padrão, a partir de outro meios de obtenção:

- Experiência ou conhecimento geral do comportamento e propriedades de materiais relevantes e instrumentos;
- Dados fornecidos em certificados de calibrações e outros certificados;
- Dados de medições anteriores;
- Valores aceitos de constantes associadas com materiais e grandezas;
- Especificações de fabricantes.

Estimativas da Incerteza Padrão

3

$$u(x_i) = \frac{s(x_i)}{\text{Divisor}}$$

A incerteza padrão depende da distribuição de dados da componente de variação.

Tipo de avaliação	Componente de incerteza	Distribuição de probabilidade	Divisor	GDL
Tipo A	Desvio padrão experimental	t-student	\sqrt{n}	n - 1
	Desvio padrão de R&R	Normal	1	n - 1
	Desvio padrão de CC	Normal	1	n - 1
Tipo B	Erros	Retangular	$\sqrt{3}$	infinitos
	Resolução	Retangular	$2\sqrt{3}$	infinitos
	Incertezas herdadas	t-student	k	ν_{eff}
	Outras	Triangular	$\sqrt{6}$	infinitos
	Outras	Bimodal	$\sqrt{2}$	infinitos

Estimativas da Incerteza Padrão

3

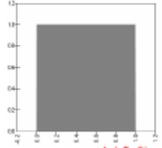
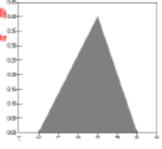
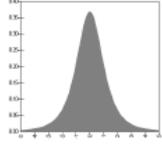
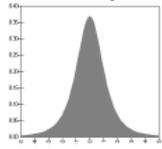
Tipo de Componente de Incerteza	Distribuição de Probabilidade	Divisor
Quando se conhecem apenas os valores máximos e mínimos de variação ($\pm a$): por exemplo, o erro máximo admissível para um determinado equipamento ou o efeito causado pela resolução finita do equipamento utilizado	Retangular 	$\sqrt{3}$
Quando se conhecem os valores máximos e mínimos de variação ($\pm a$) e o valor mais provável: por exemplo, o erro de posicionamento de um instrumento em uma marca de escala	Triangular 	$\sqrt{6}$
Desvio padrão da média de um conjunto de N medições repetidas	t-Student 	\sqrt{N}
Incerteza herdada da calibração de equipamentos e padrões	Normal ou t-Student, conforme certificado de calibração 	Valor de k informado no certificado de calibração

Figura 4. Distribuições de probabilidade e seus divisores apropriados para o tipo de componente de incerteza

Estimativas da Incerteza Padrão

3

Estimativa obtida a partir da especificação, manuais e catálogos do fabricante, ou do certificado de calibração.

O certificado de calibração de um padrão de aço inoxidável, de massa $m = 1000,000325\text{g}$, indica uma incerteza de $240\mu\text{g}$, para um nível de confiança com $k = 3$.

A incerteza padrão da massa padrão é dada por:

(Distribuição Normal)

$$u(m) = \frac{240\mu\text{g}}{3} = 80\mu\text{g}$$

Estimativas da Incerteza Padrão

3

Certificado de calibração de um resistor padrão R_S

Valor nominal: 10Ω

Valor estimado: $10,000742\Omega$ (23°C)

Incerteza de medição: $129\text{m}\Omega$ a nível de confiança de 99%

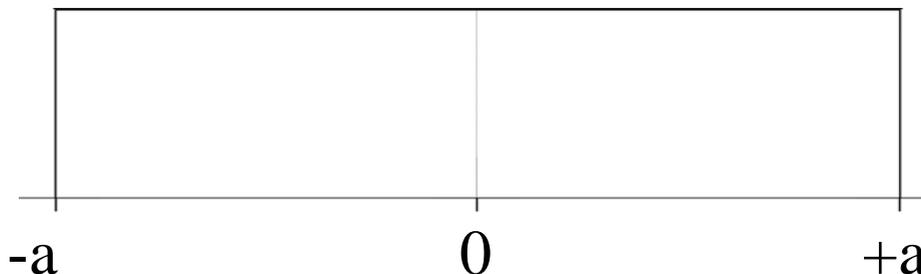
A incerteza padrão da massa padrão é dada por:

$$u(R_S) = \frac{129\text{m}\Omega}{k} = \frac{129\text{m}\Omega}{2,58} = 50\text{m}\Omega$$

Estimativas da Incerteza Padrão

3

Estimativa feita a partir da amplitude de variação: limites inferior e superior – limites simétricos (-a, +a).



O manual do fabricante estabelece que o valor do coeficiente linear de expansão térmica de um bloco padrão de aço é

$$\alpha_s = 11,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

O erro máximo é: $2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Distribuição Retangular

$$u(\alpha_s) = \frac{2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}}{\sqrt{3}} = 1,2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Componentes de Incerteza - Exercício

Exercício:

Considere a calibração de um voltímetro digital por comparação.

Código: VO341 / Série: 006-C.

Descrição: voltímetro digital.

Menor Div: 1mV

Unidade: mV

Faixa de leitura: 0 a 200mV

Temperatura ambiente: $20 \pm 3^\circ\text{C}$.

Padrão de referência: multímetro digital HP - 3458 .

Resolução: 0,01mV

Incerteza expandida $U = \pm 0,001\%$ com $k = 2$ (em relação ao fundo de escala).

Drift (instabilidade) = $\pm 0,002\text{mV}$

Faixa de leitura: 0 a 200mV .

Resultados: A bancada foi ajustada com o voltímetro digital (a ser calibrado) e as leituras foram realizadas com o padrão.

Tabela de valores medidos dada.

Componentes de Incerteza - Calibração

Exercício:

Ponto						
Fonte	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	GL

Coeficientes de Sensibilidade

4

Os coeficientes de sensibilidade são fatores de conversão de unidades de medida.

$$C_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

Regra 1: Se o modelo matemático da medição for uma soma de N variáveis, os coeficientes de sensibilidade serão todos iguais a um. Caso haja subtração, o sinal do coeficiente será negativo.

Exemplo:

Se o modelo é dado por $E = I - VV$,

então: $C_I = 1$ e $C_{VV} = -1$

Coeficientes de Sensibilidade

4

Regra 2: Se o modelo matemático da medição for apenas um produto de N variáveis, os coeficientes de sensibilidade serão iguais a (y / x_i) .

Note que aqui não é utilizado o valor de incerteza da variável, mas sim, a melhor estimativa do valor da variável em si.

A divisão segue a mesma regra.

Exemplo:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad C_F = \frac{\partial \sigma}{\partial F} = \frac{1}{A} \quad C_A = \frac{\partial \sigma}{\partial A} = -F \frac{1}{A^2}$$

Correlações entre as Componentes

5

A correlação existe quando duas grandezas de entrada, X_i e X_j , apresentam *uma relação de dependência* entre elas ou com uma terceira grandeza de entrada comum a ambas.

Exemplo: quando duas grandezas de entrada são medidas com um mesmo equipamento.

O coeficiente de correlação, $r(x_i, x_j)$, mede o grau de correlação linear entre duas variáveis (varia de -1 a 1).

No exemplo dado, $r(x_i, x_j) = 1$.

$$r(x_i, x_j) = \frac{s(x_i, x_j)}{s(x_i)s(x_j)}$$

Correlações entre as Componentes

5

Efeitos de correlação podem reduzir a incerteza combinada, se $r(x_i, x_j) < 0$.

Efeitos de correlação podem aumentar a incerteza combinada, se $r(x_i, x_j) > 0$.

$$r(x_i, x_j) = \frac{s(x_i, x_j)}{s(x_i)s(x_j)}$$

Onde $s(x_i)$ é o desvio padrão associado a x_i , $s(x_j)$ é o desvio padrão associado a x_j e $s(x_i, x_j)$ é a covariância associada a x_i e x_j , obtidos através dos dados das n medições repetidas de x_i e x_j .

Exemplo

Calibração de um voltímetro digital (Por comparação)

Descrição do voltímetro a calibrar

- Resolução: 0,1mV
- Faixa de leitura: 0 a 100mV

Descrição do padrão de referência

- Incerteza Expandida: $\pm 0,001\%$ ($k=2$) - Certificado
- Resolução: 0,01mV
- Drift (instabilidade): 0,002mV - Certificado
- Faixa de Leitura: 0 a 100mV

Valores Medidos

VVC (mV)	Leituras				
	1	2	3	4	5
25	25,09	25,11	25,08	25,07	25,09
50	50,07	50,05	50,06	50,04	50,06
75	75,11	75,12	75,1	75,11	75,13
100	100,15	100,14	100,17	100,16	100,14

Fontes de Incerteza

1. Modelo Matemático

Desvio (d) = leitura do Voltímetro – leitura do Padrão

2. Fontes de Incerteza

Grandeza	Tipo
Repetitividade (Δt)	A
Resolução do Voltímetro	B
Resolução do Padrão	B
Incerteza do Padrão	B
Drift do Padrão	B

$$d = \Delta_t + \text{Res}(\text{pad}) + \text{Res}(\text{volt}) + U(\text{pad}) + \textit{Drift}$$

Incertezas Padrão

Grandeza	Tipo	Distribuição	Divisor
Repetitividade (Δt)	A	Normal	1
Resolução do Voltímetro	B	Retangular	$2\sqrt{3}$
Resolução do Padrão	B	Retangular	$2\sqrt{3}$
Incerteza do Padrão	B	<i>t-student</i>	$k = 2$
Drift do Padrão	B	Retangular	$2\sqrt{3}$

Estimativas da Incerteza Padrão

$$u(x_i) = \frac{s(x_i)}{\text{Divisor}}$$

A incerteza padrão depende da distribuição de dados da componente de variação.

Tipo de avaliação	Componente de incerteza	Distribuição de probabilidade	Divisor	GDL
Tipo A	Desvio padrão experimental	t-student	\sqrt{n}	n - 1
	Desvio padrão de R&R	Normal	1	n - 1
	Desvio padrão de CC	Normal	1	n - 1
Tipo B	Erros	Retangular	$\sqrt{3}$	infinitos
	Resolução	Retangular	$2\sqrt{3}$	infinitos
	Incertezas herdadas	t-student	k	ν_{eff}
	Outras	Triangular	$\sqrt{6}$	infinitos
	Outras	Bimodal	$\sqrt{2}$	infinitos

Incertezas Padrão

Desvio padrão de R&R
(Repetitividade)

≠

Desvio padrão experimental (S).


$$S_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Considerando o valor de referência para 50mV

$$\Delta_t = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0,0114}{\sqrt{5}} = 0,0051$$

$$u_{\Delta_t} = \frac{\Delta_t}{1} = 0,0051$$

Incertezas Padrão

Grandeza	Distrib	Divisor	Incerteza Padrão
Repetitividade (Δt) (A)	Normal	1	$u_{\Delta t} = \frac{\Delta t}{1} = 0,0051$
Resolução do Voltímetro (B)	Retangular	$2\sqrt{3}$	$u_{ResV} = \frac{0,1}{2\sqrt{3}} = 0,0289$
Resolução do Padrão (B)	Retangular	$2\sqrt{3}$	$u_{ResP} = \frac{0,01}{2\sqrt{3}} = 0,0029$
Incerteza do Padrão (B)	<i>t-student</i>	$k = 2$	$\frac{U}{k} = \frac{100 \times 0,001\%}{2} = 0,0005$
Drift do Padrão (B)	Retangular	$2\sqrt{3}$	$u_{Drift} = \frac{2 \times 0,002}{2\sqrt{3}} = 0,0011$

Coeficientes de Sensibilidade

$$d = \Delta_t + \text{Res}(\text{pad}) + \text{Res}(\text{volt}) + U(\text{pad}) + \text{Drift}$$

$$C_{\Delta_t} = \frac{\partial d}{\partial \Delta_t} = 1$$

Grandeza	Coeficientes
Repetitividade (Δt)	1
Resolução do Voltímetro	1
Resolução do Padrão	1
Incerteza do Padrão	1
Drift do Padrão	1

Correlações entre as Componentes

5

No exemplo dado as variáveis são consideradas como independentes.

Então o coeficiente de correlação é nulo.

$$r(x_i, x_j) = \frac{s(x_i, x_j)}{s(x_i)s(x_j)} = 0$$

$$s(x_i, x_j) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

Incerteza Combinada

6

É necessário **combinar** as componentes de incerteza da mesma maneira a fim de **prover um único valor de incerteza.**

Quando não houver correlação entre as grandezas de entrada, a incerteza combinada é dada pela multiplicação da estimativa de cada incerteza padrão pelo seu respectivo coeficiente de sensibilidade.

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i)$$

$$\Delta Z = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial X_1} \Delta X_1\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X_2} \Delta X_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial Z}{\partial X_n} \Delta X_n\right)^2}$$

Quando houver correlação entre as grandezas de entrada, a incerteza combinada é dada por:

$$u_C^2 = \sum_{i=1}^N C_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N C_i C_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)$$

No exemplo:

$$u_C = \sqrt{(0,0051)^2 + (0,0289)^2 + (0,0029)^2 + (0,0005)^2 + (0,0011)^2}$$

$$u_C = \sqrt{0,00087} = 0,0295$$

Incerteza de Expandida

7

Através do Teorema do Limite Central, assume-se que a distribuição de probabilidade da grandeza do mensurando (Y) será normal, para um grau de liberdade v_{eff} .

Pressupostos:

As contribuições das incertezas combinadas tem a mesma ordem de grandeza.

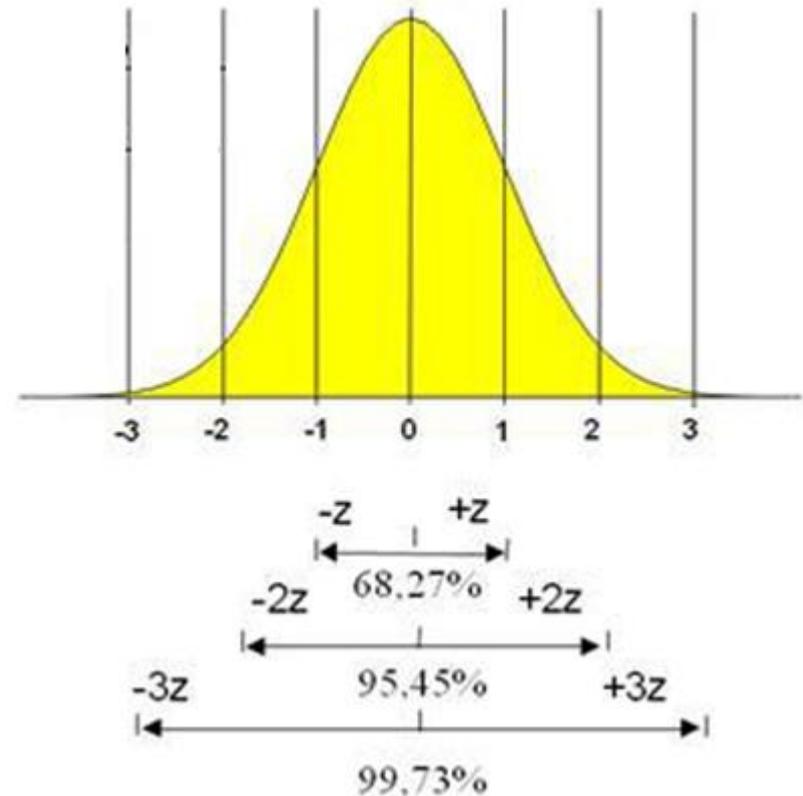
As distribuições de probabilidade associadas às contribuições de incerteza se assemelhem da distribuição normal.

Incerteza de Expandida

7

O intervalo de \pm um desvio padrão ao redor da estimativa do mensurando corresponde a uma probabilidade de abrangência de aproximadamente 68%.

Para aumentar tal probabilidade de abrangência, deve-se multiplicar a incerteza combinada pelo fator de abrangência k .



Incerteza de Expandida

7

O resultado da combinação é denominado de incerteza expandida U , dada por:

$$U = k_p u_C$$

Incerteza Combinada	Fator de Abrangência	Incerteza Expandida
$u_C(y)$	k_p	U

Onde k_p é definido para uma determinada probabilidade de abrangência. Para uma distribuição normal e uma probabilidade de abrangência de 95,45%, $k = 2$.

Fator de Abrangência

7

Em estudos com poucas repetições ($N < 30$) é recomendável assumir a distribuição da amostra como *t-student*.

Neste caso, k_p dependerá também do número efetivo de graus de liberdade v_{eff} .

O número de graus de liberdade é diretamente proporcional a confiabilidade da contribuição para a incerteza.

O Método ISO GUM recomenda o cálculo de v_{eff} através da equação de Welch-Satterthwaite:

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_i^N \frac{u^4(x_i)}{v_i}}$$

Fator de Abrangência

7

Em geral, v_{eff} não será inteiro.

Deve-se arredondar ou truncar o número para o valor inteiro mais próximo.

Localizar v_{eff} na tabela e determinar k_p .

v_{eff}	$k_{95,45\%}$	v_{eff}	$k_{95,45\%}$
1	13,97	15	2,18
2	4,53	16	2,17
3	3,31	17	2,16
4	2,87	18	2,15
5	2,65	19	2,14
6	2,52	20	2,13
7	2,43	25	2,11
8	2,37	30	2,09
9	2,32	35	2,07
10	2,28	40	2,06
11	2,25	45	2,06
12	2,23	50	2,05
13	2,21	100	2,025
14	2,20	acima de 100	2,00

Fator de Abrangência

7

No exemplo do voltímetro, o cálculo de v_{eff} será:

Grandeza	Incerteza Padrão	GDL
Repetitividade (Δt) (A)	0,0509	N-1=4
Resolução do Voltímetro (B)	0,0289	∞
Resolução do Padrão (B)	0,0029	∞
Incerteza do Padrão (B)	0,0005	∞
Drift do Padrão (B)	0,0011	∞

$$v_{eff} = \frac{(0,0295)^4}{\frac{(0,0051)^4}{4} + \frac{(0,0289)^4}{\infty} + \frac{(0,0029)^4}{\infty} + \frac{(0,0005)^4}{\infty} + \frac{(0,0011)^4}{\infty}}$$

Fator de Abrangência

7

No exemplo do voltímetro, o cálculo de v_{eff} será:

$$v_{eff} = \frac{(0,0295)^4}{\frac{(0,0051)^4}{4}} = 4471$$

Localizar v_{eff} na tabela e determinar k_p .

$$k_p = 2$$

As contribuições das incertezas devem ter a mesma ordem de grandeza.

Fator de Abrangência

7

Finalmente, a incerteza expandida será:

$$U = k_P u_C = 2 \times 0,0295 = 0,0590$$

8

O resultado da incerteza expandida deve ser expresso no máximo com dois algarismos significativos.

O valor do resultado da medição deve ser arredondado para o mesmo número de casas decimais do valor da incerteza expandida.

$$RM = 50,056 \pm 0,059 \text{mV}$$

Planilha de Cálculo da Incerteza da Medição

Características do Equipamento		Unidade da Grandeza
Resolução:		
Faixa de Indicação:		

Características do Padrão					
Nominal	Valor Certificado	U	k	V _{eff}	
1					
100					

Referência	Leituras em ()					Média	Tendência	Desvio Padrão
	Leitura 1	Leitura 2	Leitura 3	Leitura 4	Leitura 5	Geral		
1								
100								

Cálculo da Incerteza da Medição											
Refer.	Componentes da Incerteza da Medição							Incerteza padrão Combinada	V _{eff}	k (95,45%)	Incerteza Padrão Expandida U
	Repetitividade	Fonte 2	Fonte 3	Fonte 4	...						
1											
100											

Atividade 2

Calibração de um Ohmímetro digital (Por comparação)

Descrição do ohmímetro a calibrar

- Resolução: $0,01\Omega$
- Faixa de leitura: 0 a 10000Ω

Descrição do padrão de referência

- Incerteza Expandida: $\pm 0,0001\%$ ($k=2$) - Certificado
- Resolução: $0,001\Omega$
- Drift (instabilidade): $0,002\Omega$ - Certificado
- Faixa de Leitura: 0 a 10000Ω

METROLOGIA E ENSAIOS

Incerteza de Medição

Prof. Alexandre Pedott

pedott@producao.ufrgs.br