PROVA 1 DE PESQUISA OPERACIONAL I – Prof. Fogliatto – A duração da prova é de 3 horas – A prova é sem consulta e pode ser resolvida à lápis, mas se desejar contestar a correção, passe as respostas a tinta. Seja organizado nas suas soluções. Boa sorte!

1. Considere a formulação abaixo. Nela, a variável x_1 é do tipo ≥ 0, mas a variável x_2 é irrestrita no sinal (ou seja, pode assumir valores positivos e negativos).

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ z = 3x_1 - 3x_2 \\
&s.a. \\
&7x_1 - 10x_2 \leq 70 \\
&-x_1 - x_2 \leq 1 \\
&-x_2 \leq 4
\end{aligned}
$$

(a) 8 pts. Solucione o problema graficamente. Identifique as restrições e seu sentido no gráfico, bem como o espaço de soluções, o vetor *z* e as coordenadas do ponto ótimo.

(b) 5 pts. Para resolver o problema em que uma das variáveis é irrestrita no sinal utilizando o algoritmo Simplex, deve-se substituir a variável em questão pela combinação de outras duas variáveis positivas; isto é, $x_2 = x_2' - x_2''$, tal que $x_2' \geq 0$ e $x_2'' \geq 0$. Reescreva o problema acima no formato padrão, adicionando variáveis de excesso, folga e artificiais onde necessário, e substituindo a variável irrestrita no sinal conforme apresentado acima.

(c) 12 pts. Resolva o problema reescrito no formato padrão na parte (b) utilizando o tableau do Simplex. Interprete a solução ótima obtida.

2. 25 pts. Formule o problema descrito a seguir; não é necessário resolver o problema, basta apresentar a formulação. Ao fazê-lo, defina claramente as variáveis de decisão, função objetivo e o significado das restrições. Apresente a formulação de forma organizada.

A Cia. de Eletrodomésticos Tchaupia fabrica lava-louças e lava-roupas. As demandas a serem atendidas desses produtos no próximo ano estão apresentadas no quadro abaixo (as demandas são apresentadas em unidades, para cada trimestre do ano; o horizonte de planejamento é, assim, de quatro períodos). As atividades em um dado período são: (*i*) utilizar os operários disponíveis para produzir itens e atender demandas no próprio período ou em períodos futuros; (*ii*) construir estoques, se necessário, para atender demandas subsequentes; e (*iii*) alterar o tamanho da força de trabalho. Quatro custos são relevantes para a empresa, sendo específicos para cada trimestre, conforme dados na tabela abaixo; são eles: c_t e v_t = custo de produção de uma lava-louças e uma lava-roupas, respectivamente, no período *t*; j_t e k_t = custo de manter uma lava-roupas e uma lava-roupas, respectivamente, em estoque (os custos incidem nos níveis de estoque contados no final do período *t*); e p_t = custo do salário por hora de trabalho utilizável no período *t*. Suponha que cada lava-louças requeira 1,5 horas de trabalho e cada lava-roupas 2 horas de trabalho. No início do ano, 5000 horas de trabalho estão disponíveis, além de estoques iniciais de 75 lava-louças e 50 lava-roupas. A Tchaupia julga inaceitável deixar a força de trabalho flutuar em mais que 10% de um trimestre ao seguinte. Formule o problema de forma a minimizar o custo total, atendendo as demandas em cada trimestre.

		Demandas			
Produto	**Símbolo**	**1º trimestre**	**2º trimestre**	**3º trimestre**	**4º trimestre**
Lava-louças	E_t	2000	1300	3000	1000
Lava-roupas	M_t	1200	1500	1000	1400
Custo prod. lava-louças	c_t	50	60	60	30
Custo prod. lava-roupas	v_t	150	150	170	130
Custo estoque lava-louças	j_t	10	10	12	10
Custo estoque lava-roupas	k_t	40	40	50	30
Custo salário	p_t	8	10	12	7

Vire a folha

3. 25 pts. Utilize o método do M-Grande e o Simplex no tableau para resolver o seguinte problema. Seja organizado nos tableaus, indicado as operações feitas em cada troca de base. (*Dica*: são 4 trocas de base até a base ótima).

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ z = -x_1 + 2x_2 \\
&s.a. \\
&x_1 + x_2 \geq 2 \\
&-x_1 + x_2 \geq 1 \\
&x_2 \leq 3 \\
&x_1\ \geq 0;\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

4. (a) 10 pts; (b) 4 pts; (c) 1 pt; (d) 10 pts.
   Considere o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
&Max\ z = x_1 + 2x_2 \\
&s.a. \\
&x_1 + 3x_2 \leq 8 \\
&x_1 + x_2 \leq 4 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

a. Use a análise gráfica para identificar todas as soluções em pontos extremos para este modelo.

b. Calcule o valor da função objetivo para cada uma das soluções viáveis em pontos extremos (FPE). Use esta informação para identificar uma solução ótima.

c. Introduza as variáveis de folga

d. Trabalhe com o método simplex (tableau do simplex), para solucionar o problema

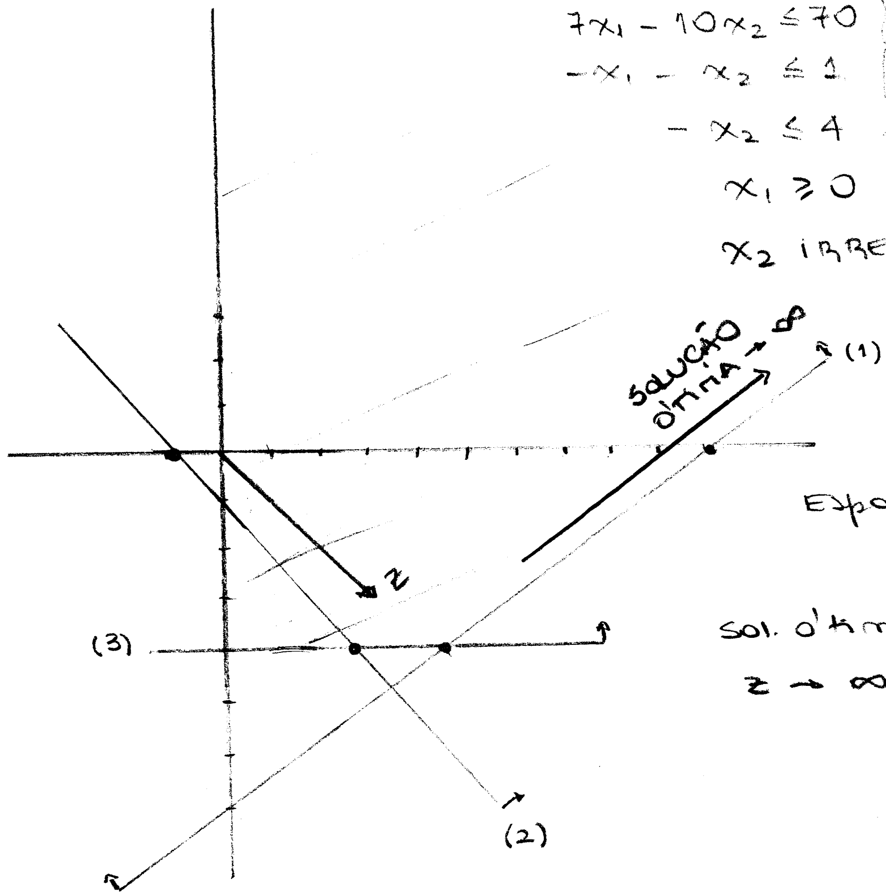
① CASO ESPECIAL → PROBLEMA c/ SOL. TENDENDO AO INFINITO

$\max z = 3x_1 - 3x_2$ (1 pts)

s.a:

$7x_1 - 10x_2 \leq 70$
$-x_1 - x_2 \leq 1$
$-x_2 \leq 4$ } 1 pt cada
$x_1 \geq 0$
x_2 IRRESTRITO

(a)



Espaço soluções = 1 pts

Sol. ótima: $z \to \infty$ } 2 pts.

(b)

Substituindo x_2 por $x_2' - x_2''$, tem-se:

$\max z = 3x_1 - 3(x_2' - x_2'')$

s.a:

$$7x_1 - 10x_2' + 10x_2'' + f_1 = 70$$
$$-x_1 - x_2' + x_2'' + f_2 = 1$$
$$-x_2' + x_2'' + f_3 = 4$$
VAR ≥ 0

} 1 pt por linha.

1

(c)

DESEMPATE DA ENTRADA PELO MAIS DA ESQUERDA

	x_1	x_2'	x_2''	f_1	f_2	f_3	RHS
z	-3	3	-3	0	0	0	0
f_1	7	-10	10	1	0	0	70
f_2	-1	-1	1	0	1	0	1
f_3	0	-1	1	0	0	1	4

$L_1' = L_1 + 3L_2'$

$L_2' = 1/7\, L_2$

$L_3' = L_3 + L_2'$

$L_4' = L_4$

	x_1	x_2'	x_2''	f_1	f_2	f_3	RHS
z	0	-1	1	$3/7$	0	0	30
x_1	1	$-10/7$	$10/7$	$1/7$	0	0	10
f_2	0	$-17/7$	$17/7$	$1/7$	1	0	11
f_3	0	-1	1	0	0	1	4

PROBLEMA C/ SOL. TENDENDO AO INFINITO.

5 pts por tableau + 2 pela identificação da solução

(2)

Variáveis de decisão:

d_t = nº de lava-louças produzidos no trimestre t

w_t = nº de lava-roupas " " " "

r_t = nº de lava-louças em estoque no final do período t

s_t = nº de lava-roupas em estoque no final do período t

h_t = nº utilizável de horas de trabalho no trimestre t.

Função objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Min } z = \; & 50d_1 + 150w_1 + 10r_1 + 40s_1 + 8h_1 + \\ & 60d_2 + 150w_2 + 10r_2 + 40s_2 + 10h_2 + \\ & 60d_3 + 170w_3 + 12r_3 + 50s_3 + 12h_3 + \\ & 30d_4 + 130w_4 + 10r_4 + 30s_4 + 7h_4 \end{aligned}$$

Restrições:

- Trimestre 1:

$d_1 + 75 = 2000 + r_1$ → lava-louça

$w_1 + 50 = 1200 + s_1$ → lava-roupa

$1{,}5d_1 + 2w_1 \leq h_1$ → horas de trabalho

$h_1 \geq 0{,}9(5000)$ → Flutuação força-trabalho.

$h_1 \leq 1{,}1(5000)$

- Trim. 2:

$d_2 + r_1 = 1300 + r_2$

$w_2 + s_1 = 1500 + s_2$

$1{,}5d_2 + 2w_2 \leq h_2$

$h_2 \geq 0{,}9h_1$ e $h_2 \leq 1{,}1h_1$

- Trim. 3:

$d_3 + r_2 = 3000 + r_3$

$w_3 + s_2 = 1000 + s_3$

$1{,}5d_3 + 2w_3 \leq h_3$

$h_3 \geq 0{,}9h_2$

$h_3 \leq 1{,}1h_2$

- Trim. 4:

$d_4 + r_3 = 1000 + r_4$

$w_4 + s_3 = 1400 + s_4$

$1{,}5d_4 + 2w_4 \leq h_4$

$h_4 \geq 0{,}9h_3$ e $h_4 \leq 1{,}1h_3$

VAR ≥ 0

③ Max $z = -x_1 + 2x_2 - Ma_1 - Ma_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 - e_1 + a_1 = 2$$

$$-x_1 + x_2 - e_2 + a_2 = 1$$

$$x_2 + f_3 = 3$$

VAR ≥ 0

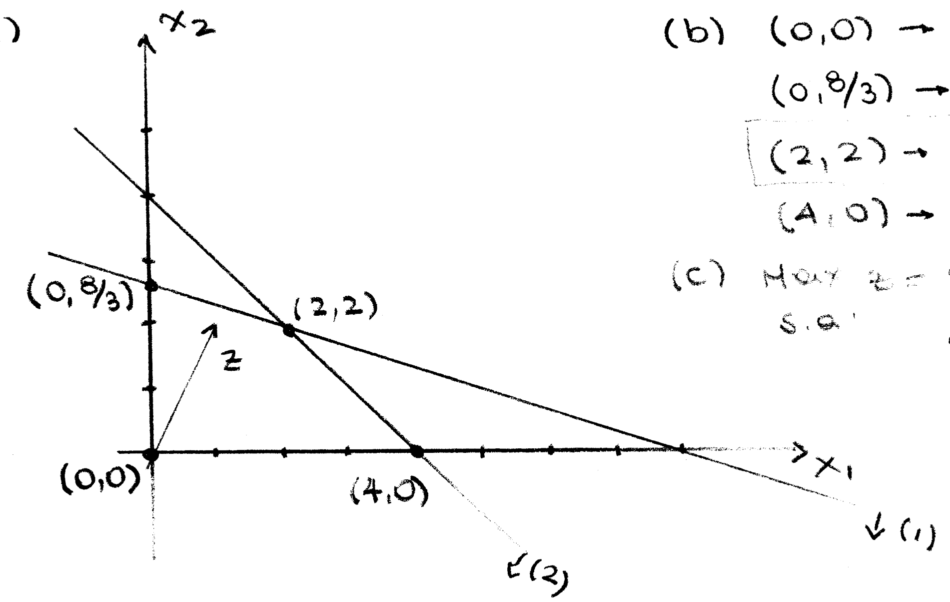
	x_1	x_2	e_1	a_1	e_2	a_2	f_3	RHS	PRÉ-PIVOT
z	1	−2	0	M	0	M	0	0	$L_1' = L_1 - ML_2 - ML_3$
a_1	1	1	−1	1	0	0	0	2	
a_2	−1	1	0	0	−1	1	0	1	
f_3	0	1	0	0	0	0	1	3	
z	1	$-2-2M$	M	0	M	0	0	$-3M$	$L_1' = L_1 - (-2-2M)L_3'$
a_1	1	1	−1	1	0	0	0	2	$L_2' = L_2 - L_3'$
a_2	−1	1	0	0	−1	1	0	1	$L_3' = L_3$
f_3	0	1	0	0	0	0	1	3	$L_4' = L_4 - L_3'$
z	$-1-2M$	0	M	0	$-2-M$		0	$-M+2$	$L_1' = L_1 - (-1-2M)L_2'$
a_1	2	0	−1	1	1		0	1	$L_2' = \frac{1}{2}L_2$
x_2	−1	1	0	0	−1		0	1	$L_3' = L_3 + L_2'$
f_3	1	0	0	0	1		1	2	$L_4' = L_4 - L_2'$
z	0	0	$-1/2$		$-3/2$		0	$5/2$	$L_1' = L_1 + 3/2\,L_2'$
x_1	1	0	$-1/2$	$\cancel{1/2}$	$1/2$		0	$1/2$	$L_2' = 2L_2$
x_2	0	1	$-1/2$		$-1/2$		0	$3/2$	$L_3' = L_3 + \frac{1}{2}L_2'$
f_3	0	0	$1/2$		$1/2$		1	$3/2$	$L_4' = L_4 - \frac{1}{2}L_2'$
z	3	0	−2		0		0	4	$L_1' = L_1 + 2L_4'$
e_2	2	0	−1		1		0	1	$L_2' = L_2 + L_4'$
x_2	1	1	−1		0		0	2	$L_3' = L_3 + L_4'$
f_3	−1	0	1		0		1	1	$L_4' = L_4$

③ Cont.

	x_1	x_2	e_1	e_2	f_3	RHS
z	1	0	0	0	2	6
e_2	1	0	0	1	1	2
x_2	0	1	0	0	1	3
e_1	-1	0	1	0	1	1

④

(a)



(b) $(0,0) \to z = 0$

$(0, 8/3) \to z = 16/3$

$\boxed{(2,2) \to z = 6}$

$(4,0) \to z = 4$

(c) Max $z = x_1 + 2x_2$

s.a:

$x_1 + 3x_2 + f_1 = 8$

$x_1 + x_2 + f_2 = 4$

vars ≥ 0

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS	
z	-1	-2	0	0	0	$L_1' = L_1 + 2L_2'$
f_1	1	3	1	0	8	$L_2' = L_2/3$
f_2	1	1	0	1	4	$L_3' = L_3 - L_2'$
z	$-1/3$	0	$2/3$	0	$16/3$	$L_1' = L_1 + 1/3\, L_3'$
x_2	$1/3$	1	$1/3$	0	$8/3$	$L_2' = L_2 - 1/3\, L_3'$
f_2	$2/3$	0	$-1/3$	1	$4/3$	$L_3' = 3/2\, L_3$
z	0	0	$1/2$	$1/2$	6	
x_2	0	1	$1/2$	$1/2$	2	
x_1	1	0	$-1/2$	$3/2$	2	