Formulação e problemas típicos

1. Uma pequena manufatura produz dois modelos, Standard e Luxo, de um certo produto. Cada unidade do modelo Standard exige 1 hora de lixação e 1 hora de polimento. Cada unidade do modelo luxo exige 1 hora de lixação e 4 horas de polimento. A fábrica dispõe de 2 lixadoras e 3 polidoras, cada um trabalhando 40 horas semanais. As margens de lucro são \$24 e \$34, respectivamente, para cada unidade Standard e Luxo. Não existem restrições de demanda para ambos os modelos. Elabore um modelo de programação linear que permita calcular a produção semanal que maximiza a margem total de lucro do fabricante.

Resolução:

$x_1 = \text{quantidade de modelo Standard};\ x_2 = \text{quantidade de modelo Luxo}$

$$
\begin{aligned}
&Max\ z = 24x_1 + 34x_2 \\
&s.a. \\
&x_1 + \ \ x_2 \le 80 \quad \text{(lixação)} \\
&x_1 + 4x_2 \le 120 \quad \text{(polimento)} \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

2. Um fazendeiro dispõe de 400 ha cultiváveis com milho, trigo ou soja. Cada hectare de milho exige \$2.000 para preparação do terreno, 20 homens-dia de trabalho e gera um lucro de \$600. Um hectare de trigo envolve custos de \$2.400 para preparação do terreno, 30 homens-dia de trabalho e dá um lucro de \$800. Analogamente, um hectare de soja exige \$1.400, 24 homens-dia e dá um lucro de \$400. O fazendeiro dispõe de \$800.000 para cobrir os custos de trabalho e 7.200 homens-dia de mão de obra. Elabore um modelo de programação linear de forma a calcular a alocação de terra para os vários tipos de cultura com o objetivo de maximizar o lucro total.

Resolução:

$x_1 = \text{ha milho};\ x_2 = \text{ha trigo};\ x_3 = \text{ha soja}$

$$
\begin{aligned}
&Max\ z = 600x_1 + 800x_2 + 400x_3 \\
&s.a. \\
&x_1 + x_2 + x_3 \le 400 \quad \text{(área cultivável disponivel)} \\
&2.000x_1 + 2.400x_2 + 1.400x_3 \le 800.000 \quad \text{(custos preparação do terreno)} \\
&20x_1 + 30x_2 + 24x_3 \le 7.200 \quad \text{(mão de obra disponivel)} \\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

3. A empresa de manufatura Ômega descontinuou a produção de uma determinada linha de produtos não lucrativa. Esse fato acabou criando um considerável excesso de capacidade produtiva. A direção está levando em conta a possibilidade de dedicar esse excesso de capacidade produtiva para um ou mais produtos. A estes vamos chamá-los de produtos 1, 2 e 3. A capacidade disponível nas máquinas que poderiam limitar a produção está sintetizada na tabela a seguir:

Tipo de máquina	Tempo disponível (horas-máquina por semana)
Fresadora	500
Torno	350
Retificadora	150

O número de horas-máquina exigidas para cada unidade do respectivo produto é:

Coeficiente de produtividade (horas-máquina por unidade)			
Tipo de máquina	Produto 1	Produto 2	**Produto 3**
Fresadora	9	3	5
Torno	5	4	0
Retificadora	3	0	2

O departamento de vendas sinaliza que o potencial de vendas para os produtos 1 e 2 excede a taxa de produção máxima e que o potencial de vendas para o produto 3 é de 20 unidades por semana. O lucro unitário seria, respectivamente, de US$ 25 para os produtos 1, 2 e 3. O objetivo é determinar quanto de cada produto a Ômega deveria produzir para maximizar os lucros.

a. Formule um modelo de programação linear para esse problema.

b. Use um computador para solucionar este modelo de método simplex.

Resolução:

x_1 = quantidade de produto i

$$
\begin{aligned}
&Max\, z = 25x_1 + 25x_2 + 25x_3\\
&s.a.\\
&9x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 500 \ \text{(disponibilidade fresadora)}\\
&5x_1 + 4x_2 \le 350 \ \text{(disponibilidade torno)}\\
&3x_1 + 2x_3 \le 150 \ \text{(disponibilidade retificadora)}\\
&x_3 \le 20 \ \text{(potencial de vendas produto 3)}\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

~~(x1, x2, x3) = (26,19; 54,76; 20); z = 2.904,76~~ **ERRATA:** Resolução: x1 = 0, x2 = 87,5; x3 = 10; z = 2437,5

4. A tabela a seguir sintetiza as informações-chave sobre dois produtos, A e B, e os recursos, Q, R e S, necessários para produzi-los.

Recurso	Emprego de Recurso por Unidade: Produto A	Emprego de Recurso por Unidade: Produto B	**Quantidade de recurso disponível**
Q	2	1	2
R	1	2	2
S	3	3	4
Lucro por unidade	3	2	

Todas as hipóteses da programação linear são satisfeitas.

a. Formule um modelo de programação linear para esse modelo

b. Resolva o modelo graficamente

c. Verifique o valor exato de sua solução ótima do item (b) resolvendo o problema algebricamente para encontrar as soluções simultâneas das duas equações relevantes.

Resolução:

x_1 = quantidade de produto A; x_2 = quantidade de produto B

$$Max\ z = 3x_1 + 2x_2$$
$$s.a.$$
$$2x_1 + x_2 \leq 2 \quad \text{(recurso Q)}$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad \text{(recurso R)}$$
$$3x_1 + 3x_2 \leq 4 \quad \text{(recurso S)}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(x1, x2) = (2/3; 2/3)

5. Quase todas as empresas que atuam no varejo têm mais produtos do que espaço para vendê-los. Esse problema é característico de supermercados, lojas de departamentos e até mesmo empresas de comércio eletrônico. Nessas empresas, a administração precisa decidir que produtos vender dado um espaço disponível, de modo que sua lucratividade seja máxima. Suponha que o supermercado tenha 20 itens que ele pode disponibilizar em suas prateleiras, conforme a tabela a seguir:

Item	Demanda entre reabastecimentos	Lucro (R$/unidade)	Área (cm2/unidade)
1	50	2	65
2	35	2	45
3	25	3	58
4	20	4	71
5	45	4	71
6	50	6	77
7	45	5	90
8	40	5	90
9	30	6	65
10	50	4	52
11	35	2	90
12	50	6	52
13	20	5	71
14	25	3	77
15	30	4	58
16	20	2	45
17	60	2	65
18	35	1	103
19	25	5	71
20	45	4	97

Se todos os itens fossem colocados à venda, seriam necessários 52.290 cm2 de área de prateleira. O supermercado só dispõe de 37.000 cm2 para alocar todos os itens a serem vendidos. Formule o problema do supermercado com o objetivo de maximizar lucro total.

Resolução:

x_1 = quantidade de produto i

$$Max\ z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 6x_6 + 5x_7 + 5x_8 + 6x_9 + 4x_{10} + 2x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 3x_{14} + 4x_{15} + 2x_{16} + 2x_{17} + x_{18} + 5x_{19} + 4x_{20}$$

$s.a.$

Restrição de disponibilidade de área :

$$65x_1 + 45x_2 + 58x_3 + 71x_4 + 71x_5 + 77x_6 + 90x_7 + 90x_8 + 65x_9 + 52x_{10} + 90x_{11} + 52x_{12} + 71x_{13} + 77x_{14} + 58x_{15} + 45x_{16} + 65x_{17} + 103x_{18} + 71x_{19} + 97x_{20} \le 37.000$$

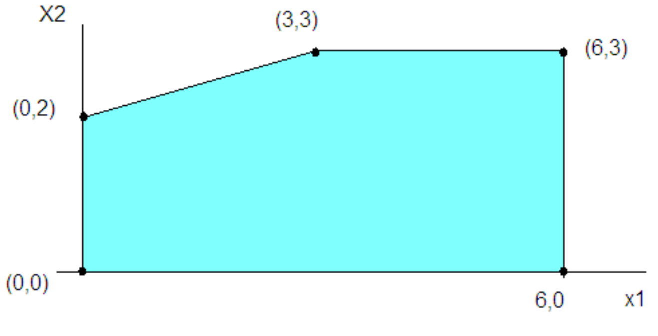
Restrições de não superar demanda :

$x_1 \le 50$	$x_2 \le 35$
$x_3 \le 25$	$x_4 \le 20$
$x_5 \le 45$	$x_6 \le 50$
$x_7 \le 45$	$x_8 \le 40$
$x_9 \le 30$	$x_{10} \le 50$
$x_{11} \le 35$	$x_{12} \le 50$
$x_{13} \le 20$	$x_{14} \le 25$
$x_{15} \le 30$	$x_{16} \le 20$
$x_{17} \le 60$	$x_{18} \le 35$
$x_{19} \le 25$	$x_{20} \le 45$

$x_i \ge 0$; inteiro

6. A área sombreada do gráfico a seguir representa a região de soluções viáveis de um problema de programação linear cuja função objetivo deve ser maximizada.

Classifique cada uma das afirmações seguintes como verdadeira ou falsa e, a seguir, justifique sua resposta baseando-se no método gráfico.



a. Se (3,3) produz um valor maior da função objetivo do que (0,2) e (6,3), então (3,3) deve ser a solução ótima.

b. Se (3,3) for uma solução ótima e existem soluções ótimas múltiplas, então (0,2) ou (6,3) também têm que ser uma solução ótima.

c. O ponto (0,0) não pode ser uma solução ótima.

Resolução: Verdadeiro; verdadeiro; falso

7. A Cia Metalco deseja misturar uma nova liga composta de 40% de estanho, 35% de zinco e 25% de chumbo a partir de diversas ligas disponíveis com as seguintes propriedades:

Propriedade	Liga 1	2	3	4	5
Percentagem de estanho	60	25	45	20	50
Percentagem de zinco	10	15	45	50	40
Percentagem de Chumbo	30	20	25	24	10
Custo (US$/lb)	22	20	25	24	27

O objetivo é determinar as proporções dessas ligas que devem ser misturadas para produzir nova liga em custo mínimo.

a. Formule um modelo de programação linear para esse problema

b. Solucione esse modelo utilizando solver excel.

Resolução:

x_i = quantidade de liga i

$$Min\ z = 22x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 24x_4 + 27x_5$$

$s.a.$

$$20x_1 - 15x_2 + 5x_3 - 20x_4 + 10x_5 = 0 \ \text{(Estanho)}$$

$$-25x_1 - 20x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 5x_5 = 0 \ \text{(Zinco)}$$

$$5x_1 - 5x_2 - x_4 - 15x_5 = 0 \ \text{(Chumbo)}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 \ \text{(proporção, total 100\%)}$$

$$x_i \geq 0$$

8. Imagine que a Abecitrus (Associação Brasileira dos Exportadores de Cítricos), que congrega as empresas produtoras e exportadoras de sucos e assemelhados, esteja interessada em ajudar na coordenação e otimização dos custos de transporte da indústria. Suponha que existam 3 regiões produtoras no Brasil e 5 destinos (mercados) importantes para os produtos. As quantidades produzidas, os volumes consumidos pelos mercados, assim como os custos de transporte entre origens e destinos podem ser vistos na tabela 3.2.

O interesse da Abecitrus é escoar toda a produção, atendendo aos mercados consumidores com custo de transporte mínimo.

Da região produtora	Unidade	Para o mercado consumidor: Mercosul	Chile	UE	Japão	Ásia/Pacífico	Produção 1.000 m3
São Paulo I	US$/m3	52	77	145	280	267	771
São Paulo II	US$/m3	60	85	150	285	272	964
Perímetros irrigados do NE	US$/m3	110	135	115	301	287	193
Exportação do setor	1.000	18	7	1.680	159	64	1.927
Exportação do setor	US$ M	9	4	840	79	32	964

Resolução:

x_{ij} = quantidade do produto escoado da região produtora i para o mercado j

$$Min\ z = 52x_{11} + 77x_{12} + 145x_{13} + 280x_{14} + 267x_{15}$$
$$+60x_{21} + 85x_{22} + 150x_{23} + 285x_{24} + 272x_{25}$$
$$+110x_{31} + 135x_{32} + 115x_{33} + 301x_{34} + 287x_{35}$$

s.a.

atender demandas dos mercados consumidores

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 18$ (mercosul)

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 7$ (Chile)

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1.680$ (UE)

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 159$ (Japão)

$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 64$ (Ásia/pacífico)

escoar toda a produção das regiões produtoras

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 771$ (São Paulo I)

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 964$ (São Paulo II)

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 193$ (Perímetros Irrigados do NE)

$x_{ij} \geq 0$

9. Maureen Laird é o CEO da Alva Electric Co., uma grande empresa de serviço público do Meio-oeste. A empresa programou a construção de novas hidrelétricas daqui a cinco, dez e 20 anos a partir de agora para atender às necessidades da população crescente na região onde atua. Para cobrir pelo menos os custos de construção, Maureen precisa investir parte do dinheiro da empresa agora visando atender essas necessidades futuras de fluxo de caixa. Maureen pode comprar apenas três tipos de ativos financeiros, cada um dos quais custa US$ 1 milhão por unidade. Também é possível comprar unidades fracionárias. Os ativos geram receita daqui a cinco, dez e 20 anos contados a partir de agora e essa receita é necessária para cobrir pelo menos as necessidades de caixa nesses anos. Qualquer receita acima da exigência mínima para cada período será usada para aumentar o pagamento de dividendos a acionistas em vez de poupá-la para ajudar a atender às exigências de fluxo de caixa mínimas no período seguinte. A tabela a seguir mostra tanto a receita gerada por cada ativo como também o mínimo de receita necessária para cada um dos períodos futuros quando uma nova hidrelétrica será construída.

	Receita por unidade de ativo			Fluxo de caixa
Ano	Ativo 1	Ativo 2	Ativo 3	mínimo exigido
5	2 milhões	1 milhão	0,5 milhão	400 milhões
10	0,5 milhão	0,5 milhão	1 milhão	100 milhões
20	0	1,5 milhão	2 milhões	300 milhões

Maureen quer determinar o mix de investimentos nesses ativos que cobrirão as necessidades de fluxo de caixa e, ao mesmo tempo, minimizando a quantia total investida.

a. Formule um modelo de programação linear para esse problema

Resolução:

x_i = valor investido no ativo financeiro i (milhão)

$$
\begin{aligned}
&Min\ z = x_1 + x_2 + x_3 \\
&s.a. \\
&2x_1 + x_2 + 0{,}5x_3 \geq 400 \quad (5\ \text{anos}) \\
&0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 \geq 100 \quad (10\ \text{anos}) \\
&1{,}5x_2 + 2x_3 \geq 300 \quad (20\ \text{anos}) \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

b. Resolva utilizando solver Excel

RESOLUÇÃO: x1 = 100; x2 = 200; x3 = 0; z = 300

Resolução gráfica e Introdução ao método Simplex

10. Considere o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
&Max\ z = x_1 + 2x_2 \\
&s.a. \\
&x_1 + 3x_2 \leq 8 \\
&x_1 + x_2 \leq 4 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

a. Use a análise gráfica para identificar todas as soluções em pontos extremos para este modelo.

b. Calcule o valor da função objetivo para cada uma das soluções viáveis em pontos extremos (FPE). Use esta informação para identificar uma solução ótima.

c. Introduza as variáveis de folga

d. Trabalhe com o método simplex (tableau do simplex), para solucionar o problema

RESOLUÇÃO:

	x1	x2	f1	f2	RHS
z	0,00	0,00	0,50	0,50	6,00
x2	0,00	1,00	0,50	-0,50	2,00
x1	1,00	0,00	-0,50	1,50	2,00

Solução ótima x1 = 2; x2 = 2; z = 6

O método simplex busca solução para função objetivo em apenas três dos quatro pontos extremos. Os critérios de entrada e saída das variáveis de base permitem que não necessite realizar a resolução da função objetivo para todos os pontos. Estas regras também permitem a garantia da melhoria da função objetivo conforme segue nas iterações.

Método simplex

11. A Brinquedos S.A. fabrica dois tipos de brinquedos de madeira: soldados e trens. Um soldado é vendido por R$27 e usa R$10 de matéria-prima. Cada soldado fabricado aumenta os custos diretos de mão-de-obra e custos indiretos em R$14. Um trem é vendido a R$21 e utiliza R$9 de matéria-prima. Cada trem aumenta os de mão-de-obra e indiretos em R$10. A fabricação requer dois tipos de mão-de-obra: carpinteiro e pintor. A fabricação de um soldado requer 2h de um pintor e 1 h de carpinteiro. Um trem demanda 1hora de pintura e 1h de carpintaria. Para cada semana, a Brinquedos pode conseguir toda a matéria-prima necessária, mas apenas 100h de pintura e 80h de carpintaria. A demanda para os trens é ilimitada, mas a de soldados é de no máximo 40 por semana.

a. Formule um modelo de programação linear para esse problema, considerando que a Brinquedos quer maximizar o lucro semanal.

Resolução:

x_1 = quantidade de produto soldados
x_2 = quantidade de produto trens

$$
\begin{aligned}
&Max\ z = 3x_1 + 2x_2\\
&s.a.\\
&2x_1 + x_2 \le 100 \quad \text{(pintor)}\\
&x_1 + x_2 \le 80 \quad \text{(carpinteiro)}\\
&x_1 \le 40 \quad \text{(demanda trens)}\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

b. Resolva graficamente o problema

c. Resolva pelo método simplex.

Resolução:

	x1	x2	f1	f2	f3	RHS
z	0,00	0,00	1,00	1,00	0,00	180,00
x2	0,00	1,00	-1,00	2,00	0,00	60,00
f3	0,00	0,00	-1,00	1,00	1,00	20,00
x1	1,00	0,00	1,00	-1,00	0,00	20,00

20 soldados e 60 trens, com z=180

12. Resolva os seguintes problemas utilizando tableau do simplex

a.

$$
\begin{aligned}
&Max\ z = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3\\
&s.a.\\
&2x_1 + x_2 + x_3 \le 4\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4\\
&x_1 + x_2 + x_3 \le 3\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Resolução:

	x1	x2	x3	f1	f2	f3	f4	RHS
z	2/3	0	0	0	1 1/3	2 1/3	0	14 2/3
f1	1 1/3	0	0	1	- 1/3	- 1/3	0	1 1/3
x2	1/3	1	0	0	2/3	- 1/3	0	1 1/3
x3	1/3	0	1	0	- 1/3	2/3	0	1 1/3
f4	1/3	0	0	0	- 1/3	- 1/3	1	1/3

b.
$$\begin{aligned}
&Max\, z = 2x_1 - x_2 + x_3\\
&s.a.\\
&3x_1 + x_2 + x_3 \le 6\\
&x_1 - x_2 + 2x_3 \le 1\\
&x_1 + x_2 - x_3 \le 2\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Resolução:

	x1	x2	x3	f1	f2	f3	RHS
z	0	0	1 1/2	0	1 1/2	1/2	2 1/2
f1	0	0	1	1	-1	-2	1
x1	1	0	1/2	0	1/2	1/2	1 1/2
x2	0	1	-1 1/2	0	- 1/2	1/2	1/2

13. Para o método do “grande número” ou “M grande”, explique por que o método simplex jamais escolheria uma variável artificial para ser uma variável básica que entra uma vez que todas as variáveis artificiais são não-básicas.

14. Resolva os seguintes problemas utilizando tableau do simplex

a.
$$\begin{aligned}
&Max\, z = 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4\\
&s.a.\\
&x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 20\\
&-4x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 \le 40\\
&2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 8x_4 \le 50\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}$$

demonstre que a solução z é ilimitada

Resolução:

	x1	x2	x3	x4	f1	f2	f3	
z	0	0	0	60	-13	3	14	546
x1	1	0	0	14	-3	1	3	116
x3	0	0	1	1	0	0	0	13
x2	0	1	0	7	-2	0	2	74

b.
$$\begin{aligned}
&Min\, z = 2x_1 + 3x_2 + x_3\\
&s.a.\\
&x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 8\\
&3x_1 + 2x_2 \qquad \ge 6\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Resolução:

	x1	x2	x3	e1	e2	RHS
z	0	0	0	-1	-1	7
x2	0	1	1	0	0	1,8
x1	1	0	0	0	0	0,8

X1 = 0,8; x2 = 1,8; z = 7

c.
$$
\begin{aligned}
& Max\, z = 90x_1 + 70x_2 \\
& s.a. \\
& 2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& \quad x_1 - x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

i. Demonstre graficamente que este problema não tem solução viável;

ii. Usando o método do grande número, avance pelo método simplex, passo a passo, para demonstrar que o problema não tem solução viável

Exercícios retirados de:

ANDRADE, E. L. Introdução à Pesquisa Operacional – métodos e modelos para análise de decisão. LTC editora. 2ª edição. 2002

COLIN, E. C. Pesquisa Operacional – 170 Aplicações em Estratégia, Finanças, Logística, Produção, Marketing e Vendas. LTC editora. 2007.

HILLER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. Introdução à Pesquisa Operacional. Mc Graw Hill. 8ª Edição. 2006