

Métodos Quantitativos

Análise de séries de tempo: modelos de decomposição

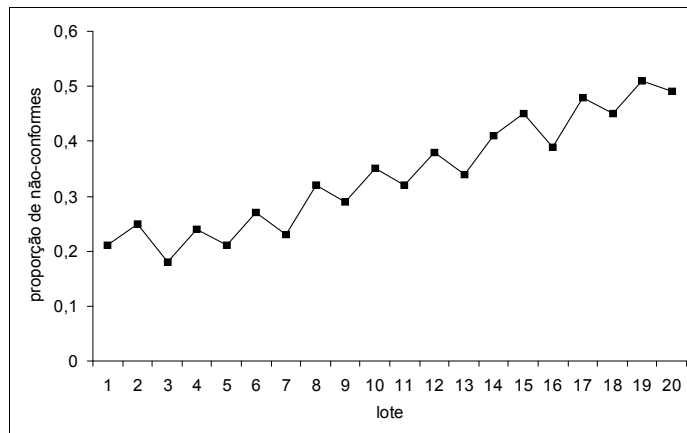
Profa. Dra. Liane Werner

Séries de temporais - Introdução

- Uma série temporal é qualquer conjunto de observações ordenadas no tempo.
- Dados administrativos, econômicos, de engenharia ou de ciências naturais ocorrem na forma de série temporal, onde as observações são dependentes do próprio tempo.
- na área econômica => total de exportações;
- na física => temperatura diária em determinada localidade
- no marketing => as vendas semanais
- em demografia => a população de um país ano a ano
- na engenharia supervisionando a qualidade de um processo de manufatura.

2

Séries de temporais - Introdução



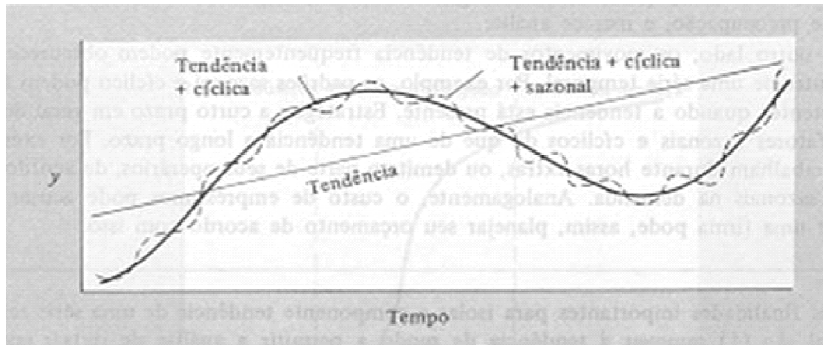
3

Séries de temporais - Introdução

- Séries temporais são compostas por quatro elementos.
- A primeira componente é a *Tendência*, que verifica o sentido de deslocamento da série ao longo de vários anos.
- A segunda componente é o *Ciclo*, movimento ondulatório que ao longo de vários anos tende a ser periódico.
- A terceira componente é a *Sazonalidade* que tem a duração de curto prazo, inferior a um ano.
- A quarta componente é conhecida como *Ruído Aleatório*. O ruído aleatório compreende a variabilidade intrínseca aos dados, que não pode ser modelada.

4

Séries de temporais - Introdução



Fonte: Stevenson, W.

5

Séries de temporais - Introdução

- A literatura sobre as técnicas para analisar séries de tempo é vasta:
 - (i) Modelos de Decomposição;
 - (ii) Modelos de Suavização Exponencial;
 - (iii) Modelos de Box-Jenkins;
 - (iv) processos de memória longa (arfima);
 - (v) análise de intervenção;
 - (vi) modelos não-lineares (arch, garch, tarch)
 - (vii) redes neurais

6

Séries de temporais – Modelos de decomposição

- Modelos de Decomposição consistem em, como o próprio nome diz,
- decompor o modelo que descreve o comportamento da série temporal através de suas componentes:
 - Valor da série temporal = padrão temporal + erro
 - Valor da série temporal = f (Tend., Ciclo, Sazon., Ruído Aleat.) ou

$$Y_t = f (T_t, C_t, S_t, \varepsilon_t)$$

onde: Y_t é o valor da série temporal

T_t é a componente Tendência no período t

C_t é a componente Ciclo no período t

S_t é a componente de Sazonalidade no período t

ε_t é a componente de erro ou Ruído Aleatório no período t

7

Séries de temporais – Modelos de decomposição

- É comum incluir a componente Ciclo no modelo para representar movimentos com períodos longos.
- Contudo, como em geral os períodos observados são pequenos quando comparados com o tamanho do Ciclo, muitas vezes o que se observa ao analisar o efeito da Tendência é parte do Ciclo.
- **Este fato nos leva a confundir o efeito do componente Ciclo com a componente Tendência.**
- Por isto, autores como Makridakis *et al.* (1998) e Morettin e Toloi (1987) utilizam para representar o Modelo de Decomposição a seguinte expressão:

$$Y_t = f (T_t, S_t, \varepsilon_t) \leftarrow$$

Que será utilizada doravante.

8

Séries de temporais – Modelos de decomposição

- A função exata que descreve a expressão anterior depende do método de composição a ser utilizado, que pode ser aditivo ou multiplicativo.
- O Modelo de Decomposição Aditivo considera que a série temporal é resultante da soma das componente:

$$Y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$$

- O Modelo de Decomposição Multiplicativo considera que a série temporal é resultante do produto das componentes:

$$Y_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t$$

9

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Tendência

- A componente Tendência consiste em um movimento superior a um ano e
- indica qual a direção de deslocamento da série, se esta ocorrendo um aumento global ou uma diminuição global.
- O isolamento da componente Tendência, tem duas finalidades:
 - (i) identificá-la para auxiliar no processo de previsão => usa-se análise de regressão e
 - (ii) removê-la, para que as demais componentes da série temporal sejam conhecidas => usa-se médias móveis.

10

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Tendência

- Roda-se a regressão (MQO) e a equação encontrada será utilizada para estimar valores futuros desta componente, bem como para recompor o modelo, seja aditivo ou multiplicativo.
- Uma vez identificada a Tendência, utiliza-se a técnica de Médias Móveis para isolá-la e assim obter componente de sazonalidade.
- As médias móveis podem ser definidas para qualquer ordem.
- A média móvel de ordem "k" consiste em obter a média de "m" valores observados antes do valor atual até "m" valores após.

11

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Tendência

- A expressão para obter a componente de Tendência é dada por:

$$T_t = \frac{1}{k} \sum_{j=-m}^m Y_{t+j}$$

- Caso o período de observação seja mês, será necessário calcular as médias móveis e depois centrá-las.
- A centralização consiste em obter a média aritmética de dois valores sucessivos (das médias móveis).

12

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Tendência

Conjunto de dados para o número de passageiros em vôos internacionais e a componente Tendência obtida por média móvel.

Mês/Ano	Número de Passageiros	Média Móvel de 12 meses não centrada	Média Móvel de 12 meses centrada
jan/49	112	-	-
fev/49	118	-	-
mar/49	132	-	-
abr/49	129	-	-
mai/49	121	-	-
jun/49	135	-	-
jul/49	148	126,667	126,792
ago/49	148	126,917	127,25
set/49	136	127,583	127,958
out/49	119	128,333	128,583
nov/49	104	128,833	129
dez/49	118	129,167	129,75
jan/50	115	130,333	131,25
fev/50	126	132,167	133,083
mar/50	141	134	134,917
...

Uma vez que a Tendência foi isolada, agora a obtém-se a componente de Sazonalidade S_t .

Exercício do arquivo TEQ6_chocolate: itens a,b,c

13

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Sazonalidade

- Séries que contenham componente Sazonal são comuns.
- A sazonalidade consiste um comportamento típico em períodos de tempo inferiores a um ano.
- Por exemplo:
 - as vendas de brinquedos aumentam muito no Natal e em outubro;
 - as vendas de sorvetes aumentam no verão;
 - vendas de jóias aumentam em maio.
- A maneira de obtenção da componente Sazonalidade está atrelada ao tipo de modelo, aditivo ou multiplicativo.

14

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Sazonalidade

- Obtenção da componente de Sazonalidade para o modelo aditivo
 - Após remover Tendência da série temporal, resta apenas as componentes de Sazonalidade e os Ruídos Aleatórios:

$$Y_t - T_t = S_t + \varepsilon_t$$

- Para estimar a Sazonalidade no exemplo dos passageiros, calcula-se as diferenças entre o valor observado (Y_t) e as médias móveis centradas para cada mês do ano, conforme a equação acima.

15

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Sazonalidade

Conjunto de dados para o número de passageiros em vôos internacionais e a componente Sazonalidade para o modelo aditivo

Mês/Ano	Número de Passageiros (1)	MM de 12 meses não centrada (2)	MM de 12 meses centrada (3)	Série sem Tendência (4) = (1)-(3)
jan/49	112	-	-	-
fev/49	118	-	-	-
mar/49	132	-	-	-
abr/49	129	-	-	-
mai/49	121	-	-	-
jun/49	135	-	-	-
jul/49	148	126,667	126,792	21,208
ago/49	148	126,917	127,25	20,75
set/49	136	127,583	127,958	8,042
out/49	119	128,333	128,583	-9,583
nov/49	104	128,833	129	-25
dez/49	118	129,167	129,75	-11,75
jan/50	115	130,333	131,25	-16,25
fev/50	126	132,167	133,083	-7,083
...

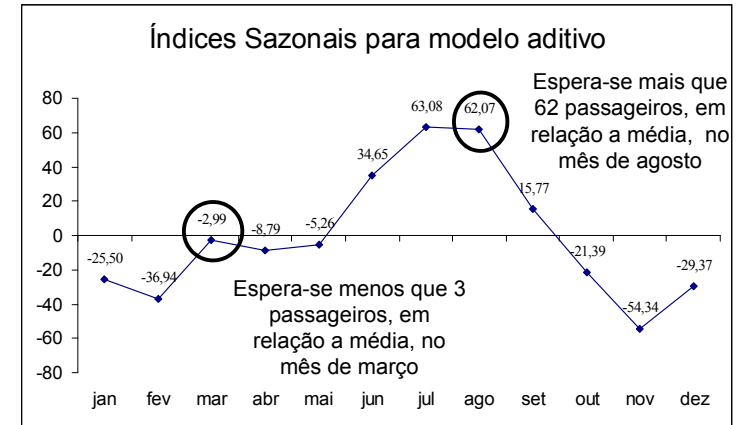
16

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Sazonalidade

- A fim de obter a componente de Sazonalidade(índice), agrupa-se os valores da série sem Tendência para cada período em estudo (4).
- Após calcula-se a média, esta média será o Índice Sazonal do período.
- Segundo Makridakis *et al.* (1998) este índices são assumidos como constantes ano a ano.
- A média (das diferenças) será uma estimativa do Índice Sazonal em um dado mês.
- Assim, o Índice Sazonal de janeiro é a média de todos os valores da série sem Tendência para janeiro.

17

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Sazonalidade



Exercício item d

18

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Sazonalidade

- Obtenção da componente de Sazonalidade para o modelo multiplicativo
 - Após remover Tendência da série temporal, resta apenas as componentes de Sazonalidade e os Ruídos Aleatórios:

$$\frac{Y_t}{T_t} = \frac{T_t \times S_t \times \varepsilon_t}{T_t} = S_t \times \varepsilon_t$$

As componentes de Sazonalidade são obtidas através da técnica da razão de médias móveis.

Esta técnica consiste em fazer a razão entre o valor observado na série e o valor da média móvel.

19

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Sazonalidade

Para estimar a Sazonalidade no exemplo, calcula-se as razões entre o valor observado (Y_t) e as médias móveis centradas para cada mês do ano.

Conjunto de dados para o número de passageiros em vôos internacionais, as médias móveis e a série sem Tendência

Mês/Ano	Número de Passageiros (1)	MM de 12 meses não centrada (2)	MM de 12 meses centrada (3)	Série sem Tendência (4) = (1)/(3)*100
jan/49	112	-	-	-
fev/49	118	-	-	-
mar/49	132	-	-	-
abr/49	129	-	-	-
mai/49	121	-	-	-
jun/49	135	-	-	-
jul/49	148	126,667	126,792	116,727
ago/49	148	126,917	127,25	116,306
set/49	136	127,583	127,958	106,285
out/49	119	128,333	128,583	92,547
nov/49	104	128,833	129	80,62
dez/49	118	129,167	129,75	90,944
jan/50	115	130,333	131,25	87,619
...

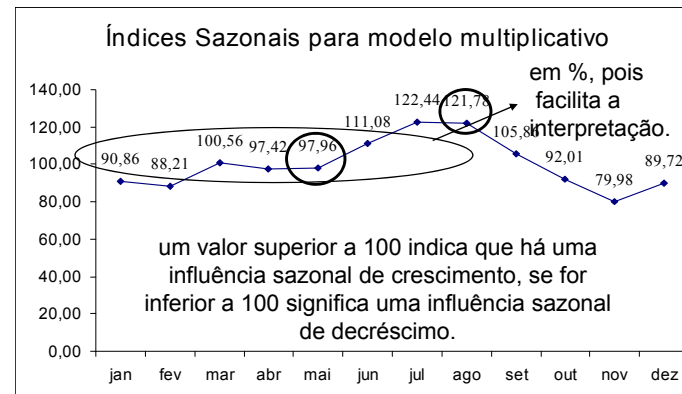
20

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Sazonalidade

- A fim de obter a componente de Sazonalidade, agrupa-se os valores da série sem Tendência para cada período em estudo (4).
- Após calcula-se a média, esta média será o Índice Sazonal do período.
- Segundo Makridakis *et al.* (1998) estes índices são assumidos como constantes ano a ano.
- A média das razões será uma estimativa do Índice Sazonal em um dado mês.
- Assim, o Índice Sazonal de janeiro é a média de todos os valores da série sem Tendência para janeiro.

21

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Sazonalidade



Exercício item e

22

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Ruído

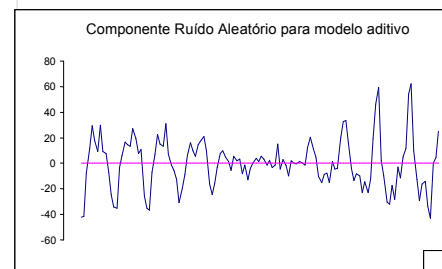
- Para obter a componente Ruído Aleatório no modelo aditivo basta subtrair o valor das demais componentes, no caso Tendência e Sazonalidade, do valor observado na série temporal.

$$Y_t - T_t - S_t = \varepsilon_t$$

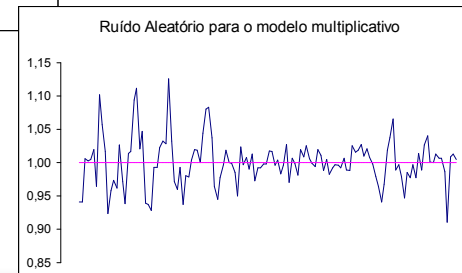
- Para o modelo multiplicativo a componente Ruído Aleatório é obtida pela razão do valor da série temporal e as demais componentes.
$$\varepsilon_t = \frac{Y_t}{S_t \times T_t} = \frac{T_t \times S_t \times \varepsilon_t}{S_t \times T_t}$$

23

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Ruído



O comportamento dos ruídos aleatórios não são iguais, isto se deve ao fato de que os valores obtidos de ε_t não são obtidos das próprias componentes Sazonais e sim dos Índices Sazonais estimados para cada período.



24

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Recomposição

Estimando através da Recomposição do Modelo

- O processo de recomposição difere, conforme o modelo que está sendo utilizado,
- se é um modelo aditivo ou um modelo multiplicativo.
- Os valores obtidos na recomposição são estimativas para o modelo adotado.

25

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Recomposição

- Para a componente Tendência foram utilizadas as médias móveis.
- Para a componente Sazonalidade são utilizados os Índices Sazonais de cada período.
- Os Índices Sazonais utilizados para recompor o modelo aditivo são os valores estabelecidos,
- contudo para o modelo multiplicativo os valores utilizados não são os percentuais e sim o valor do índice.
- A componente Ruído Aleatório não é contemplada na recomposição, pois ela não é modelável e seu valor é igualado a **zero** no modelo aditivo e a **um** no modelo multiplicativo.

26

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Recomposição

Mês	Modelo Aditivo				
	Y_t	T_t	S_t	ε_t	\hat{Y}_t
jan/49	112	-	-25,5	0	-
fev/49	118	-	-36,94	0	-
mar/49	132	-	-2,99	0	-
abr/49	129	-	-8,79	0	-
mai/49	121	-	-5,26	0	-
jun/49	135	-	34,65	0	-
jul/49	148	126,79	63,08	0	189,87
ago/49	148	127,25	62,07	0	189,32
set/49	136	127,96	15,77	0	143,73
out/49	119	128,58	-21,39	0	107,19
nov/49	104	129	-54,34	0	74,66
dez/49	118	129,75	-29,37	0	100,38
jan/50	115	131,25	-25,5	0	105,75
fev/50	126	133,08	-36,94	0	96,14
...

27

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Recomposição

Y_t	Modelo Multiplicativo				\hat{Y}_t
	T_t	S_t	ε_t	\hat{Y}_t	
112	-	0,91	1	-	
118	-	0,86	1	-	
132	-	0,99	1	-	
129	-	0,97	1	-	
121	-	0,99	1	-	
135	-	1,12	1	-	
148	126,79	1,24	1	157,18	
148	127,25	1,24	1	157,17	
136	127,96	1,06	1	135,17	
119	128,58	0,92	1	118,64	
104	129	0,8	1	103,47	
118	129,75	0,89	1	115,78	
115	131,25	0,91	1	119,16	
126	133,08	0,86	1	114,32	
...	

28

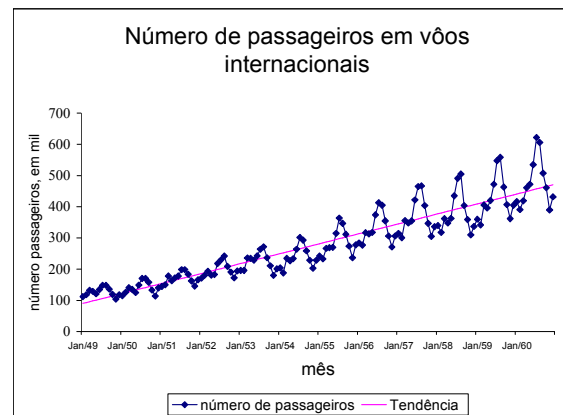
Séries de temporais – Modelos de decomposição: Previsão

- Para realizar previsões de valores futuros com base nos modelos de decomposição, basta recompô-los conforme sua forma, aditivo ou multiplicativo.
- Segundo Morettin e Toloi (1987) o modelo aditivo é mais adequado quando a componente de Sazonalidade não depende das outras componentes.
- Se a Sazonalidade varia com a tendência, o modelo multiplicativo é mais adequado.

Exercício item f

29

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Previsão



Componente Tendência obtida por regressão linear simples.

A componente de Sazonalidade aparenta uma dependência com a Tendência, pois a medida que os anos passam a amplitude sazonal aumenta, desta forma o modelo multiplicativo parece mais adequado.

30

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Previsão

- Vejamos, qual seria o valor estimado de passageiros para julho de 1961?
- Para realizar uma previsão com o modelo multiplicativo, precisa-se obter as estimativas de cada componente.
- Primeiramente precisa-se obter o valor de t , tempo correspondente ao mês de julho de 1961,
- O período de jan/49 é o primeiro logo $t = 0$ assim para jul/61, $t = 150$.
- A reta de regressão para os dados é $T_t = 90,31 + 2,66t$, sendo assim a estimativa da componente Tendência

$$T_{150} = 90,31 + 2,66 \times 150 = 489,31$$

31

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Previsão

- Obtido a estimativa para a componente Tendência,
- é necessário resgatar o valor estimado do índice percentual Sazonal para o mês de julho, que é de 122,44
- Assim $S_{150} = 1,2244$ que é o valor do **Índice Sazonal**.
- A componente Ruído Aleatório para o modelo multiplicativo é assumido como sendo 1. Desta forma $\varepsilon_{150} = 1$.

32

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Previsão

- Calculadas as estimativas das componentes, obtém-se o valor estimado para julho de 1961:

$$\begin{aligned} Y_t &= T_t \times S_t \times \varepsilon_t = T_{150} \times S_{150} \times \varepsilon_{150} \\ &= 489,31 \times 1,2244 \times 1 \\ &= 599,11 \end{aligned}$$

- A previsão para julho de 1961 seria de 599.110 passageiros em vôos internacionais.

Exercício item g

33

Séries de temporais – Modelos de decomposição: Previsão

- Para os dados do exemplo, que se encontram no arquivo TEQ6_avioes.xls
- Estime o número de passageiros de janeiro a março de 1961?

34

Métodos Quantitativos

*Análise de séries de tempo:
modelos de decomposição*

Profa. Dra. Liane Werner