

9. Experimentos Fatoriais Confundidos em Blocos

Algumas vezes a aleatorização completa fica restringida.

Por exemplos, talvez não seja possível rodar todos os ensaios:

- **No mesmo dia;**
- **Na mesma sala;**
- **Com o mesmo operador**
- **Com o mesmo lote de matéria prima**

Nesses casos, alguma informação ficará *confundida*.

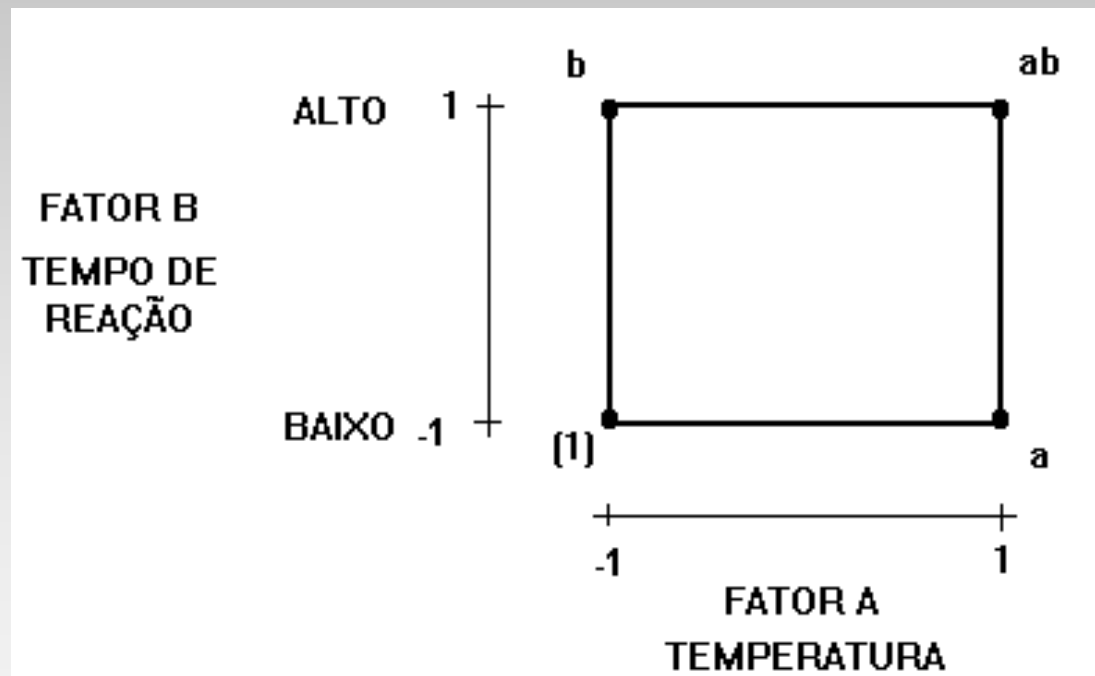
Vejamos um problema onde isso acontece:

As características de um produto químico dependem de:

Fator A: Temperatura

Fator B: Tempo de Reação

Se os fatores estão a dois níveis, temos:



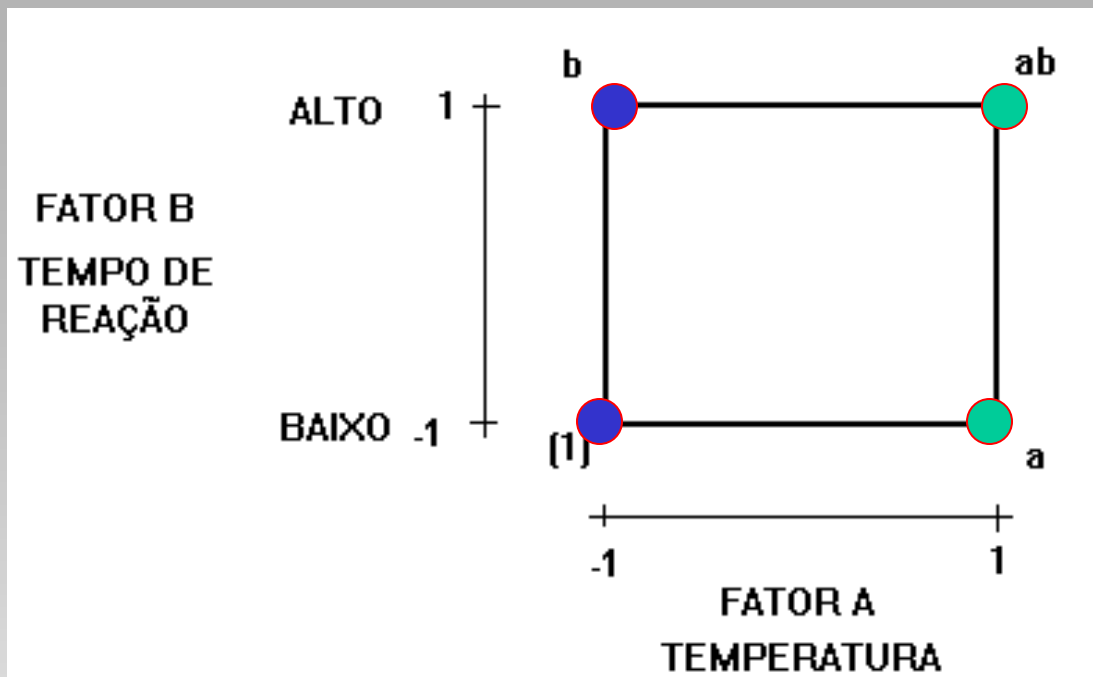
Restrição Experimental:

- O material usado no processo químico é produzido em lotes (vermelho e azul)
- É preciso dois lotes para obter as quatro amostras

Confundimento

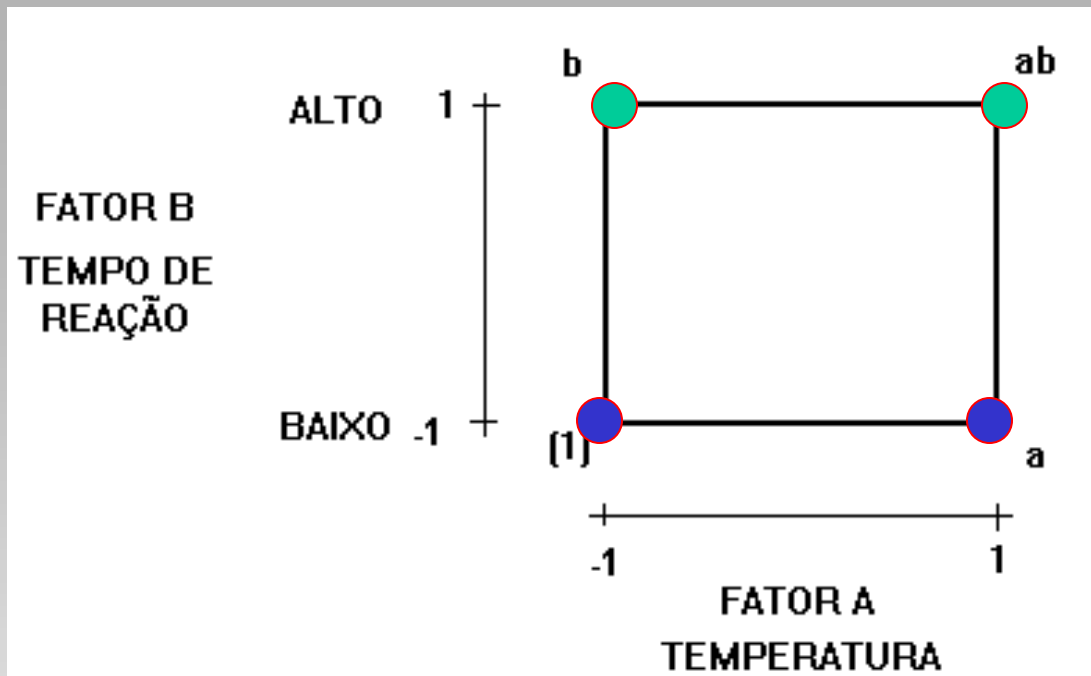
Diferenças entre os lotes ficarão confundidas com um dos efeitos, dependendo do contraste de definição utilizado para bloquear

Lotes ou Blocos	Plano		
	I	II	III
1	(1) b	(1) a	(1) ab
2	a ab	b ab	a b



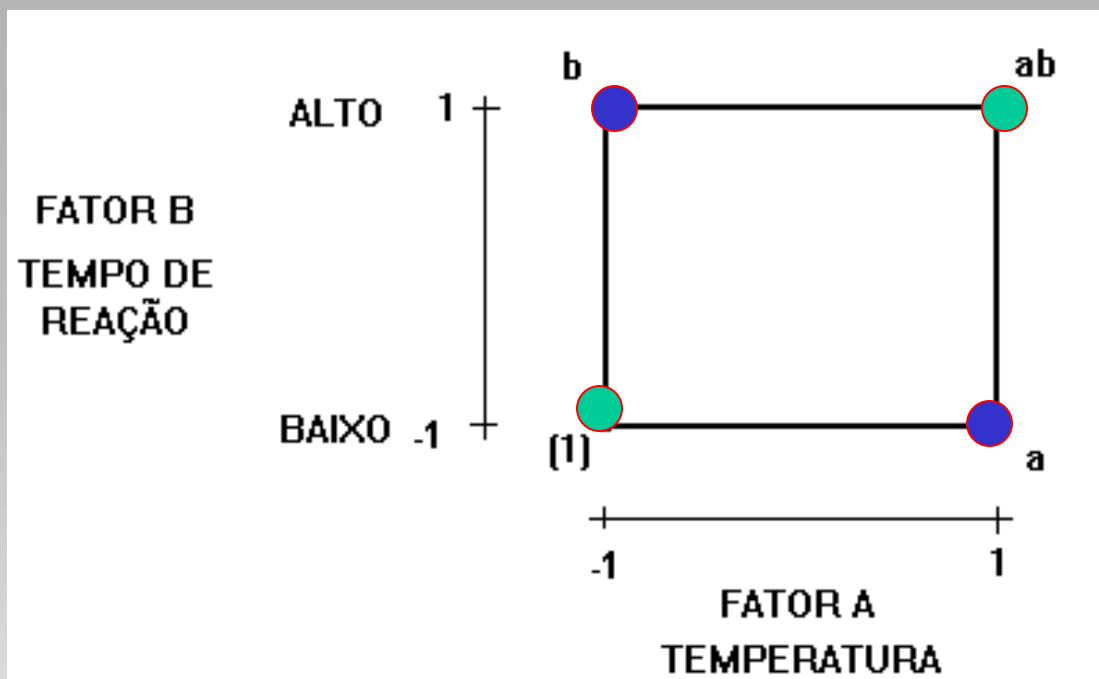
Plano I: **Bloco 2** - **Bloco 1** = **ab + a - b - (1)** = C_A

Plano II: Efeito do Fator A está confundido com os blocos e o efeito do fator B e interação AB estão salvos



Plano II: **Bloco 2** - **Bloco 1** = **ab + b - a - (1)** = C_B

Plano II: Efeito do Fator B está confundido com os blocos e o efeito do fator A e interação AB estão salvos



Plano 3: **Bloco 2** - **Bloco 1** = **ab + (1)** - **b - a** = C_{AB}

Plano 3: Interação AB está confundida com os blocos e o efeito do fator A e B estão salvos

Usa-se o contraste da interação AB pois é preferível ter uma interação confundida do que efeitos principais

Sistema para confundir efeitos:

- Definir um contraste de definição, neste exemplo AB
Isto é, a informação que ficará confundida com os blocos
- Definir quais os tratamentos que irão em cada bloco, usando:

Núm. de letras pares em comum com o CD (neste exemplo AB) vão em um bloco (1)

Núm. de letras ímpares em comum com o CD (neste exemplo AB) vão no outro bloco (2)

Para o exemplo do projeto 2^2 , escolhendo AB como contraste de definição, resulta:

	Bloco I		Bloco II	
	(1)		a	
Pares				Ímpares
	ab		b	

Escolhe-se a coluna da interação AB como contraste para a blocagem do experimento em dois

Trat	A	B	AB	Bloco
1	-1	-1	1	1
a	1	-1	-1	2
b	-1	1	-1	2
ab	1	1	1	1

A análise de variância resultaria

Fonte	SQ	GDL
A	SQA	1
B	SQB	1
AB ou Blocos	SQAB	1
Total	SQT	3

Este exemplo é apenas acadêmico, pois não temos GDL para o termo de erro.

Outro exemplo: Seja um experimento $2^3 = 8$, sendo que apenas 4 ensaios podem ser realizados em cada dia
 O experimento foi bloqueado usando o contraste ABC

Trat	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	Blocos
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1
a	1	-1	-1	-1	-1	1	1	2
b	-1	1	-1	-1	1	-1	1	2
ab	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
c	-1	-1	1	1	-1	-1	1	2
ac	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
bc	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
abc	1	1	1	1	1	1	1	2

Bloco 1 = 1 ab ac bc

Bloco 2 = a b c abc

Experimentos confundidos em bloco com repetição

Quando há repetições, há duas possibilidades:

- Experimentos completamente confundidos
- Experimentos parcialmente confundidos

Experimentos completamente confundidos

Quando em todas as repetições o mesmo CD é confundido

Seja o exemplo de um $2^3=8$ onde apenas 4 tratamentos podem ser rodados num dia e, assim, o projeto deve ser dividido em dois. E seja que escolhemos ABC como o CD.

Bloco I

(1)
ab
ac
bc

Bloco II

a
b
c
abc

Se há 3 repetições, o arranjo dos ensaios poderia ser:

Repetição I		Repetição II		Repetição III	
Bloco 1	Bloco 2	Bloco 2	Bloco 1	Bloco 1	Bloco 2
ac (1) ab bc	a c abc b	c abc b a	(1) ac bc ab	ab (1) ac bc	c b abc a

Em todas as repetições ABC é o contraste de definição; mas de resto → Aleatorização

Modelo Estatístico

$$Y_{ijkmn} = \mu + R_m + B_n + RB_{mn} + A_i + B_j + C_k + AB_{ij} + AC_{ik} + BC_{kj} + \varepsilon_{mijk}$$

R_m representa o efeito das repetições

B_n representa o efeito dos blocos 1 e 2

(confundido com a interação ABC)

RB_{mn} interação entre repetições e blocos

Usualmente o erro é tomado como a interação entre as repetições e os efeitos principais e suas interações:

$$\varepsilon_{mijk} = RA_{mi} + RB_{mj} + RC_{mk} + RAB_{mij} + RAC_{mik} + RBC_{mjk}$$

O efeito das repetições e o efeito dos blocos são analisados separadamente com o objetivo de principal de diminuir o termo de erro.

ANOVA p/ projeto completamente confundido

Fonte	GDL	
R_m Repetições	2	5 entre as
B_n Blocos ou ABC	1	subdivisões
RB Repetições x Blocos	2	
A	1	
B	1	
AB	1	18 dentro das
C	1	subdivisões
AC	1	
BC	1	
Erro = Repet. x Outros	12	
Total	23	

- Repetições e Blocos podem ser testados contra RB. É um teste fraco pois RB possui apenas 2 graus de liberdade
- Efeitos principais e interações podem ser testadas contra o erro. É um teste forte pois o erro tem 12 graus de liberdade
- ABC não pode ser testada (confundida com blocos)

EXPERIMENTOS PARCIALMENTE CONFUNDIDOS

No exemplo anterior, ABC foi confundida em todas as repetições.

Mas se há repetições, uma alternativa é:

- Confundir ABC na 1ª repetição
- Confundir AB na 2ª repetição
- Confundir AC na 3ª repetição
- Confundir BC na 4ª repetição

EXPERIMENTOS PARCIALMENTE CONFUNDIDOS

Repetição I
Conf. ABC

(1)	a
ab	b
ac	c
bc	abc

Repetição II
Conf. AB

(1)	a
c	b
ab	ac
abc	bc

Repetição III
Conf. AC

(1)	a
ac	c
abc	bc
b	ab

Repetição IV
Conf. BC

(1)	b
bc	c
a	ab
abc	ac

Modelo Estatístico

$$Y_{ijkmn} = \mu + R_m + B_{n(m)} + A_i + B_j + C_k + AB_{ij} + AC_{ik} + BC_{kj} + ABC_{ijk} + \varepsilon_{mijk}$$

$B_{n(m)}$ indica que os blocos estão aninhados dentro das repetições (em cada repetição os blocos 1 e 2 são diferentes)

$$SQB(R) = SQB + SQBR; \quad GDL = 1 + 3 = 4$$

Análise do projeto 2³ parcialmente confundido:

Fonte	GDL	
R _m Repetições	3	7 entre as
B _n Blocos (dentro de Rep.)	4	subdivisões
ABC	1	
AB	1	
AC	1	
BC	1	
A	1	24 dentro das
B	1	subdivisões
C	1	
AB	1	Somente das repet.
AC	1	em que não estão
BC	1	confundidas
ABC	1	
Erro = Repet. x Outros	17	
Total	31	

$$\text{Erro} = \text{RA} + \text{RB} + \text{RC} + \text{RAB} + \text{RAC} + \text{RBC} + \text{RABC}$$

$$\text{GDL} = 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 17$$

Experimentos confundidos em bloco sem repetição

Muitas vezes é preciso dividir em blocos e só há recursos para uma repetição

Se há muitos fatores envolvidos, digamos 4 ou mais fatores, projetos desse tipo são viáveis.

Estratégia de ação:

- Uma interação de ordem superior é confundida com o efeito do bloco (não pode ir para o termo de erro)
- Outras interações são aglutinadas para formar o termo de erro

Por exemplo, seja um fatorial $2^4=16$, onde somente oito tratamentos podem ser rodados de uma vez. Uma possível divisão em dois blocos seria usar o contraste de definição ABCD:

Trat	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	Blocos
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1
a	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	2
b	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	2
ab	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
c	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	2
ac	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1
bc	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
abc	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2
d	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	2
ad	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
bd	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
abd	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	2
cd	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
acd	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	2
bcd	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	2
abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Bloco 1

(1) ab bc ac abcd cd ad bd

Bloco 2

a b abc c bcd acd d abd

Análise de variância:

Fonte	GDL	
A	1	
B	1	
C	1	
D	1	
AB	1	
AC	1	
AD	1	
BC	1	
BD	1	
CD	1	
ABC	1	 4 GDL para o termo de erro
ABD	1	
ACD	1	
BCD	1	
Blocos (ABCD)	1	
Total	15	

- **Interações de três ou mais fatores não poderiam ser avaliadas; mas em geral não são significativas**

- **Todos os efeitos principais e interações de dois fatores poderiam ser avaliados**

Divisão em quatro blocos

Também é possível a divisão em mais que dois blocos

Seja um 2^4 que devido a restrições experimentais deve ser rodado em 4 blocos.

Contraste de definição: ABC e BCD

Atenção: nesse caso $ABC \times BCD = AD$ também fica automaticamente confundido

Usando o procedimento par-ímpar mencionado anteriormente:

Confundido ABC

(1) ab ac bc d abd acd bcd

a b c abc ad bd cd abcd

Confundido BCD

(1) bc abd acd 1

ab ac d bcd 2

a abc bd cd 3

b c ad abcd 4

Divisão de um 2⁴ em quatro blocos

Trat	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	Blocos
-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1
a	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	3
b	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	4
ab	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	2
c	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	4
ac	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	2
bc	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
abc	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	3
d	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	2
ad	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	4
bd	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	3
abd	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
cd	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	3
acd	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
bcd	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	2
abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4

Método de Yates para o cálculo das Somas Quadradas

Tratam.	Resposta	(1)	(2)	(3)	(4)	SQ
(1)	82	158	322	606	1252	
a	76	164	284	646	60	225,00
b	79	155	320	32	2	0,25
ab	85	129	326	28	30	56,25
c	71	159	0	-20	-32	64,00
ac	84	161	32	22	32	64,00
bc	55	153	14	18	-14	12,25
abc	74	173	14	12	-26	42,25
d	80	-6	6	-38	40	100,00
ad	79	6	-26	6	-4	1,00
bd	73	13	2	32	42	110,00
abd	88	19	20	0	-6	2,25
cd	72	-1	12	-32	44	121,00
acd	81	15	6	18	-32	64,00
bcd	84	9	16	-6	50	156,25
abcd	89	5	-4	-20	-14	12,25
Total						1031,00

Tabela Anova para o experimento 2⁴ em 4 bloco

Fonte	SQ	GDL	MQ	F _{calc}
A	225,00	1	225,00	8,6
B	0,25	1	0,25	0,0
C	64,00	1	64,00	2,4
D	100,00	1	100,00	3,8
AB	56,00	1	56,00	2,1
AC	64,00	1	64,00	2,4
BC	12,25	1	12,25	0,5
BD	110,25	1	110,25	4,2
CD	121,00	1	121,00	4,5
Blocos (ou ABC ou BCD ou AD)	199,50	3	66,50	
Erro (ABD + ACD + ABCD)	78,50	3	26,17	
Total	1031,00	15		

O termo de erro tem apenas 3 GDL e os teste são feitos usando $F_{0,05}(1,3) = 10,13 \rightarrow$ nenhum efeito significativo

Contudo, B e BC parecem não significativos.

Aglutinando esses efeitos ao erro:

$$SQR = 78,50 + 0,25 + 12,25 = 91,00 ;$$

$$GDL = 3 + 1 + 1 = 5$$

$$MQR = 91,00/5 = 18,2$$

$$F_{\text{calc}} A = 225 / 18,2 = 12,36$$

$$F_{\text{calc}} CD = 121 / 18,2 = 6,65$$

Agora, temos $F_{0,05}(1,5) = 6,61 \rightarrow$ A e CD significativos

Efeito	SQR	GDL	MQfator	Fcalc	Ftab
A	225,00	1	225	12.36	6.61
C	64,00	1	64	3.52	6.61
D	100,00	1	100	5.49	6.61
AB	56,00	1	56	3.08	6.61
AC	64,00	1	64	3.52	6.61
BD	110,25	1	110.25	6.06	6.61
CD	121,00	1	121	6.65	6.61
Blocos (ou ABC ou BCD ou AD)	199,50	3	66.5	3.65	6.61
Erro (ABD + ACD + ABCD+B+BC)	91,0	5	18.2		
Total	1031,00	15			

Como B apareceu como não significativo, um novo experimento poderia ser planejado sem esse fator.

Projetos fatoriais fracionados 2^{k-1}

Aumentando o nº de fatores, o nº de tratamentos e o nº de interações aumentam rapidamente

k	2^k	Efeitos Princ.	Interações						
			2 FC	3 FC	4 FC	5 FC	6 FC	7 FC	8 FC
5	32	5	10	10	5	1			
6	64	6	15	20	15	6	1		
7	128	7	21	35	35	21	7	1	
8	256	8	28	56	70	56	28	8	1

As Interações de ordem superior geralmente são:

- Difíceis de interpretar
- Não são significativas

Logo não temos interesse em estudar as interações de mais alta ordem 3 ou mais fatores

Para experimentos com muitos fatores:

- Pode não ser possível (\$) rodar o experimento completo
- Quase a mesma informação pode ser obtida de uma fração ($1/2$) dos ensaios

Quando somente uma fração dos ensaios é rodada, o projeto é chamado ***Fatorial Fracionado***

Procedimento para definir projetos fracionados

- Inicialmente divide-se o experimento completo em dois blocos, utilizando-se a interação de ordem superior
- E, após, ensaiar apenas um dos blocos, escolhido aleatoriamente
- Quando o experimento é fracionado em dois, realiza-se apenas a metade dos ensaios,
- Logo será possível estimar apenas metade dos efeitos pois cada efeito estará vinculado com outro efeito
- A estratégia é confundir efeitos principais com efeitos de interações de alta ordem supostamente não significantes

Experimento 2^3 fracionado ou 2^{3-1}

- Seja o caso simples de um projeto 2^3 onde o técnico só tem recursos para efetuar 4 ensaios, ou seja, a metade do $2^{3-1} = 4$ ensaios
- Inicialmente é realizada a blocagem do experimento em dois blocos de 4 usando o contraste de definição ABC

Por sorteio, decide-se rodar apenas o bloco 2.

- Que informação pode ser obtida do bloco 2?
- Que informação fica perdida ou confundida?

Efeitos vinculados

Tratamentos	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
a	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
b	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
ab	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
c	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
ac	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
bc	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
abc	1	1	1	1	1	1	1	1

$$C_A = +a \quad +ab \quad +ac \quad +abc \quad -(1) \quad -b \quad -c \quad -bc$$

$$C_{BC} = +a \quad -ab \quad -ac \quad +abc \quad +(1) \quad -b \quad -c \quad +bc$$

Observa-se que não é possível distinguir entre os contrastes de A e BC, pois os ensaios ab ac 1 e bc não foram realizados

**Assim, dizemos que A e BC estão vinculados
Do mesmo modo, B e AC estão vinculados, e
também C e AB**

É preciso cuidado ao escolher o contraste de definição:

**A idéia é que dois fatores importantes não devem
estar vinculados entre si**

**O que deve ser feito é vincular um efeito importante
com uma interação de ordem superior (suposta
insignificante)**

**Se o bloco 1 for rodado ao invés do bloco 2, a
situação dos vínculos é a mesma.**

Modo rápido de encontrar os vínculos:

Multiplicar os efeitos pelo(s) contraste(s) de definição, neste exemplo, o contraste ABC

$$\text{Vínculo de A: } A(ABC) = A^2BC = BC$$

$$\text{Vínculo de B: } B(ABC) = AB^2C = AC$$

$$\text{Vínculo de C: } C(ABC) = ABC^2 = AB$$

Experimento 2⁴ Completo x 2⁴⁻¹ Fracionado

- A matriz experimental apresenta um 2⁴ completo

Tratamentos	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
a	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
b	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
ab	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
c	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1
ac	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
bc	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
abc	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
d	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
ad	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
bd	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
abd	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
cd	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
acd	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
bcd	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

- Foi usado a interação ABCD para a blocagem e posterior fracionamento

Experimento 2⁴ Completo

- No experimento 2⁴ completo não há correlação entre nenhum fator indicando que todos os efeitos podem ser estudados separadamente.
- O termo de erro pode ser estimado pelas interações de três fatores (ABC, ABD, ACD, BCD)
- A interação ABCD é usada para estudar o efeito do bloco.

	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
A	1														
B	0	1													
AB	0	0	1												
C	0	0	0	1											
AC	0	0	0	0	1										
BC	0	0	0	0	0	1									
ABC	0	0	0	0	0	0	1								
D	0	0	0	0	0	0	0	1							
AD	0	0	0	0	0	0	0	0	1						
BD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1					
ABD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1				
CD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
ACD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		
BCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
ABCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Experimento 2^{4-1} Fracionado

- Experimento 2^4 fracionado ou seja 2^{4-1} onde foi usado o contraste de definição ABCD

Tratamentos	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	Y
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	10
ab	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	15
ac	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	25
bc	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	35
ad	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	40
bd	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	35
cd	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	30
abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	50
Contraste	20	30	-30	40	0	30	70	70	30	0	40	-30	30	20		

- No experimento 2^{4-1} fracionado realiza-se 8 ensaios logo é possível estimar apenas 7 efeitos pois metade dos efeitos está vinculada com outra metade

Experimento 2^{4-1} Fracionado

- Para se verificar os efeitos vinculados, multiplica-se o efeito pelo contraste de definição (ABCD) ou realiza-se a matriz de correlação

Efeito	Contraste	Efeito vinculado
A	ABCD	BCD
B	ABCD	ACD
AB	ABCD	CD
C	ABCD	ABD
AC	ABCD	BD
BC	ABCD	AD
ABC	ABCD	D

- A com BCD
- B com ACD
- AB com CD
- C com ABD
- AC com BD
- BC com AD
- ABC com D

Experimento 2⁴⁻¹ Fracionado

- Verifica-se na matriz de correlação, os efeitos que apresentam correlação 1

	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	
A	1															
B	0	1														
AB	0	0	1													
C	0	0	0	1												
AC	0	0	0	0	1											
BC	0	0	0	0	0	1										
ABC	0	0	0	0	0	0	1									
D	0	0	0	0	0	0	0	1								
AD	0	0	0	0	0	0	0	0	1							
BD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1						
ABD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1					
CD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1				
ACD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
BCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		
ABCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Experimento 2^{4-1} Fracionado

- O experimento 2^{4-1} é de resolução IV, ou seja, os efeitos principais estão vinculados com interações de três fatores e as interações de dois fatores estão vinculadas com outras de dois fatores.
- As interações de três fatores não podem ser usadas na estimativa do termo de erro pois estão vinculadas com fatores principais. Seria necessário realizar repetições para estimar o termo de erro.
- A interação ABCD não pode ser estimada devido ao fracionamento ter sido realizado usando o seu contraste de definição.

Experimento 2^{4-1} Fracionado

- Um experimento 2^{4-1} seria viável caso um dos fatores B, C ou D não interagisse com os demais, ou seja, existiriam razões técnicas para escolher entre as interações de dois fatores vinculadas
- Por exemplo, se o fator D não interagisse com os demais
 - AB com ~~CD~~
 - AC com ~~BD~~
 - BC com ~~AD~~
- Mas ainda seria necessário realizar repetições para estimar o termo de erro pois não sobra nenhuma interação de mais alta ordem livre uma vez que estão todas vinculadas com efeitos principais e interações de dois fatores

Exemplo experimento 2^{4-1} Fracionado

Número de cartas processadas por minuto em uma máquina processadora de envelopes depende de 4 fatores:

Fator A: Ângulo da correia transportadora

Fator B: Velocidade da correia

Fator C: Material da correia

Fator D: Posição da polia

Cada um desses fatores é fixado em dois níveis e a metade de um 2^4 , ou seja, um 2^{4-1} é rodado.

ABCD é escolhido como o contraste de definição

Assim, $A(ABCD) = BCD, \dots$

$AB(ABCD) = CD, \dots$

As fórmulas utilizadas nos cálculos dos experimentos fracionados

$$Efeito = \frac{Contraste}{N/2}$$

$$SQ = \frac{Contraste^2}{N}$$

“N” corresponde a quantidade de ensaios realizadas no experimento fracionado

No exemplo $N = 2^{4-1} = 8$

Exemplo experimento 2^{4-1} Fracionado

Tratamentos	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
a	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
b	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
ab	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
c	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
ac	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
bc	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
abc	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
d	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
ad	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
bd	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
abd	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
cd	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
acd	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
bcd	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Como pode ser visto, o contraste ABCD foi usado na divisão em dois blocos: bloco 1 amarelo formado pelos sinais positivos e bloco 2 branco formado pelos sinais negativos.

Bloco 1 (1) ab ac bc ad bd cd abcd

Bloco 2 a b c abc d abd acd bcd

Os engenheiros executaram apenas o bloco 1 amarelo.

Análise de variância para o projeto 2^{4-1}

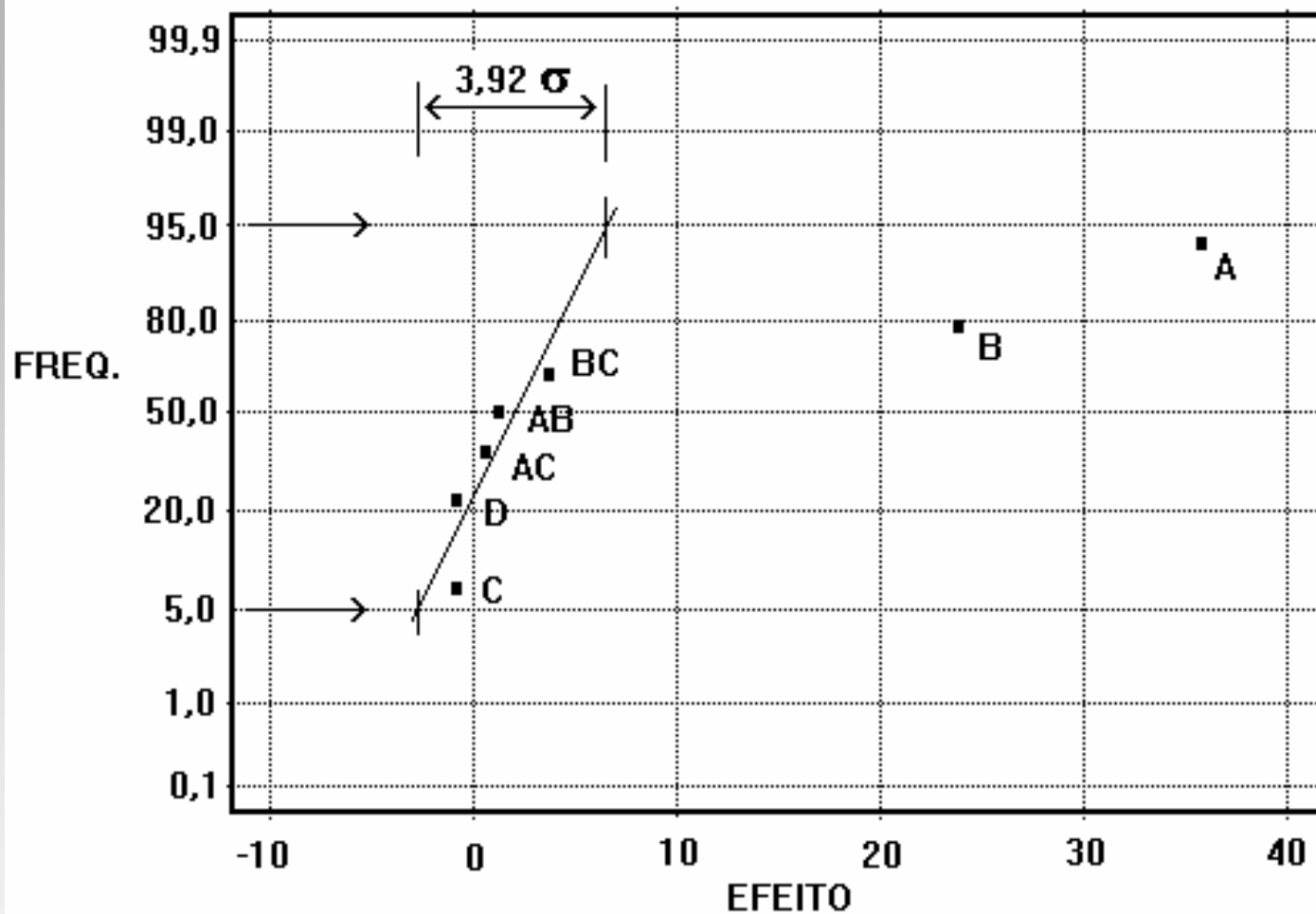
Fonte	SQ	GDL
A ou BCD	2701,125	1
B ou ACD	1128,125	1
AB ou CD	3,125	1
C ou ABD	1,125	1
AC ou BD	1,125	1
BC ou AD	28,125	1
D ou ABC	1,125	1
Total	3863,875	7

- Não há termo de erro pois como não tem repetição não sobraram graus de liberdade
- Mas pode-se verificar que a SQ de A e B são bem maiores do que dos demais fatores
- Os demais fatores (AB,C,AC,BC,D) podem ser usados para estimar o termo de erro

Papel de probabilidade

- Listar os efeitos em ordem ($I = 1,7$) crescente,
- Plotar os efeitos no eixo vertical,
- Com os valores de $100((2I-1) / 2N)$ no eixo vertical

Efeito	Valor	Ordem I	$100((2I-1) / 14)$
C	-0,75	1	7,1
D	-0,75	2	21,4
AC	0,75	3	35,7
AB	1,25	4	50,0
BC	3,75	5	64,2
B	23,75	6	78,6
A	36,75	7	92,8



Alternativa para estimar MQR:

- **Aglutinando as SQ dos efeitos não significativos:**

$$\text{SQR} = \text{SQC} + \text{SQD} + \text{SQAC} + \text{SQAB} + \text{SQBC} = 34,625$$

$$\text{SQR} = 1,125 + 1,125 + 1,125 + 3,125 + 28,125 = 34,625$$

$$\text{MQR} = 34,625 / 5 = 6,9$$

- **O valor do MQR estimado é colocado na tabela para continuar os cálculos da tabela ANOVA.**

Estimativa do MQR:

- Aglutinando as SQ dos efeitos não significativos:

$$\text{SQR} = \text{SQC} + \text{SQD} + \text{SQAC} + \text{SQAB} + \text{SQBC} = 34,625$$

$$\text{MQR} = 34,625 / 5 = 6,9$$

Fonte	SQ	GDL	MQ	F	p-value	F crit
A	2701,13	1,00	2701,13	390,05	0,00001	6,61
B	1128,13	1,00	1128,13	162,91	0,00005	6,61
Erro	34,63	5,00	6,93			
Total	3863,90	7,00				

Os fatores A e B são significativos

Experimento 2⁵ Completo x Fracionado

Tratamentos	A	B	AB	C	AC	BC	AB C	D	AD	BD	AB D	CD	AC D	BC D	AB CD	E	AE	BE	AB E	CE	AC E	BC E	AB CE	DE	AD E	BD E	AB DE	CD E	AC DE	BC DE	AB CD E
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
a	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
b	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
ab	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
c	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1
ac	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1
bc	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
abc	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
d	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
ad	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1
bd	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
abd	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
cd	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
acd	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
bcd	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
e	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
ae	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1
be	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1
abe	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
ce	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
ace	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
bce	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
abce	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
de	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
ade	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
bde	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
abde	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
cde	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
acde	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
bcde	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
abcde	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1



Experimento 2⁵ Completo

- No experimento 2⁵ completo não há correlação entre nenhum fator indicando que todos os efeitos podem ser estudados separadamente.
- O termo de erro pode ser estimado pelas interações de três fatores e quatro fatores
- A interação ABCDE é usada para estudar o efeito do bloco.

Experimento 2⁵ Completo

	A	B	AB	C	AC	BC	AB	C	D	AD	BD	AB	D	CD	AC	BC	AB	AD	BD	AB	CD	AC	BC	AB	
A	1																								
B	0	1																							
AB	0	0	1																						
C	0	0	0	1																					
AC	0	0	0	0	1																				
BC	0	0	0	0	0	1																			
ABC	0	0	0	0	0	0	1																		
D	0	0	0	0	0	0	0	1																	
AD	0	0	0	0	0	0	0	0	1																
BD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1															
ABD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1														
CD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1													
ACD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1												
BCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1											
ABCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1										
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1									
AE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1								
BE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1							
ABE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1						
CE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1					
ACE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1				
BCE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
ABCE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		
DE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
ADE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
BDE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ABDE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
CDE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ACDE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
BCDE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ABCDE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Experimento 2⁵⁻¹ Fracionado

- Experimento 2⁵ fracionado ou seja 2⁵⁻¹ onde foi usado o contraste de definição ABCDE

Tratamentos	A	B	AB	C	AC	BC	AB C	D	AD	BD	AB D	CD	AC D	BC D	AB CD	E	AE	BE	AB E	CE	AC E	BC E	AB CE	DE	AD E	BD E	AB DE	CD E	AC DE	BC DE	AB CD E
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
ab	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
ac	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
bc	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
ad	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
bd	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
cd	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
ae	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
be	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
ce	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
abce	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
de	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
abde	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
acde	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
bcde	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Experimento 2⁵⁻¹ Fracionado

- Sistema para verificação dos efeitos vinculados: multiplica-se o efeito pelo contraste de definição ou realiza-se a matriz de correlação.

Efeito	Contraste	Efeitos vinculados
A	ABCDE	BCDE
B	ABCDE	ACDE
AB	ABCDE	CDE
C	ABCDE	ABDE
AC	ABCDE	BDE
BC	ABCDE	ADE
ABC	ABCDE	DE
D	ABCDE	ABCE
AD	ABCDE	BCE
BD	ABCDE	ACE
ABD	ABCDE	CE
CD	ABCDE	ABE
ACD	ABCDE	BE
BCD	ABCDE	AE
ABCD	ABCDE	E

Experimento 2^{5-1} Fracionado

- O experimento 2^{5-1} é de resolução V, pois os efeitos principais estão confundidos com interações de quatro fatores, as interações de dois fatores estão vinculadas com as de três (provavelmente não significativas).
- As interações de três fatores não podem ser usadas na estimativa do termo de erro pois estão vinculadas com interações de dois fatores.
- A interação ABCDE não pode ser estimada devido ao fracionamento ter sido realizado usando o seu contraste de definição.
- Seria necessário realizar repetições para estimar o termo de erro ou teste gráfico de probabilidade Normal.

Experimento 2^{6-1} Fracionado

- O experimento 2^{6-1} é de resolução VI, ou seja, os efeitos principais estão confundidos com interações de cinco fatores, as interações de dois fatores estão vinculadas com as de quatro, e as de três fatores vinculadas com outras de três
- As interações de três fatores (vinculadas com outras de três fatores) são utilizadas para estimar o termo de erro,
- não sendo necessário realizar repetições

Exemplo de um projeto 2^7 dividido em dois 2^{7-1}

Metade de um $2^7 = 2^{7-1} = 64$ ensaios

Confundindo a interação mais alta com os blocos:
ou seja, Contraste de definição = ABCDEFG e
dividindo em dois blocos, resulta:

Bloco 1	(1) ab ac bc ad bd cd abcd
Bloco 2	a b c abc d acd abd bcd

Ensaia-se apenas um bloco, mas antes verifica-se os vínculos

A(ABCDEFGG) = BCDEFG ...

AB(ABCDEFGG) = CDEFG ...

ABC(ABCDEFGG) = DEFG ... etc.

Tomando para erro as interações de 3 e 4 fatores,

Fonte	GDL	Sub-total
Efeitos principais A, B, ..., G (ou interações de 6 fatores)	1 para cada	7
Interações de 2 fatores (ou interações de 5 fatores)	1 para cada	21
Interações de 3 fatores (ou interações de 4 fatores)	1 para cada	35
Total		63

Projeto fatorial 2^7 fracionado em quatro 2^{7-2}

Seja que no exemplo anterior 2^7 os recursos permitissem rodar apenas 32 ensaios. Assim, é preciso rodar um projeto fracionado em 4.

Escolhendo duas interações de cinco fatores, por exemplo ABCDE e CDEFG, para fazer a divisão dos blocos, então automaticamente uma terceira interação fica confundida:

$$ABCDE(CDEFG) = ABC^2D^2E^2FG = ABFG$$

As interações confundidas não são independentes
Portanto, devem ser escolhidas com cuidado

Nesse projeto fracionado em 2^{7-2} , roda-se $\frac{1}{4}$ dos ensaios, logo cada efeito estará vinculado com outros três efeitos, por exemplo:

$A(ABCDE) = BCDE$; $A(CDEFG) = ACDEFG$; $A(ABFG) = BFG$
 $B(ABCDE) = ACDE$; $B(CDEFG) = BCDEFG$; $B(ABFG) = AFG$
 $AB(ABCDE) = CDE$; $AB(CDEFG) = ABCDEFG$; $AB(ABFG) = FG$,
etc.....

- **Efeitos principais livres de interações de dois fatores**
- **Três interações de dois fatores ordem (AB, AF, AG) vinculadas a outras interações de dois fatores (FG, BG, BF)**
- **Escolher com cuidado os fatores principais A, B, F, G**
- **Se qualquer um deles não apresentar interação com os demais, (por exemplo, operador x aditivo), o experimento poderá ser rodado**

- As restantes 15 interações de dois fatores estão confundidas com interações três fatores ou mais
- Há ainda 6 GDL para o erro, que envolvem apenas interações de três fatores ou mais.

Análise do projeto 2^{7-2} fracionado em quatro

Fonte	GDL	Sub-total
Efeitos principais A, B, ..., G	1 para cada	7
Interações de 1a ordem AC, AD, ... AB (ou FG), AF (ou BG), AG (ou BF)	1 para cada	15
Interações de 2a ordem ACF, ACG, ...	1 para cada	6
Total		31