5. BLOCOS ALEATORIZADOS

e

QUADRADOS LATINOS

Vamos analisar 4 tipos de experimentos:

I) Projetos completamente aleatorizados

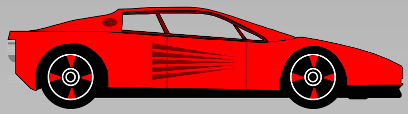
II) Projetos em blocos aleatorizados

III) Quadrados Latinos

IV) Quadrados Greco-Latinos

Focando no modelo estatístico e na informação que pode ser obtida de cada um desses experimentos.

Exemplo: Locadora de automóveis

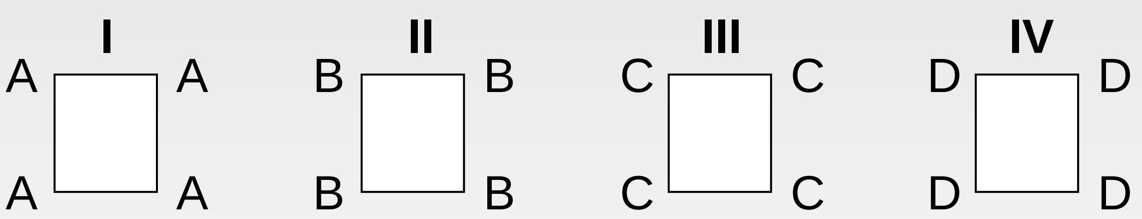


- Variável de resposta: Desgaste dos pneus (diferença de espessura após 20.000 Km de uso)
- Variável principal: Marca de pneu (é um fator a níveis fixos - 4 marcas de pneu)
- Variáveis secundárias possíveis:
  Carro, Posição dos pneus no carro, motorista
- Variáveis não controláveis:
  Temperatura, Umidade, Terreno, etc.

Exemplo de Projeto Confundido

Usando *letras* para indicar as 4 *marcas* de pneus e *números romanos* para indicar os *carros*, o experimento poderia ser efetuado da seguinte forma:

Carros			
I	II	III	IV
A	B	C	D
A	B	C	D
A	B	C	D
A	B	C	D



Analisando:

- Podemos ver falhas nesse projeto, uma vez que os totais para as marcas também serão os totais para os carros!

- Nesse projeto, o efeito das marcas e dos carros está confundido, e a análise fica prejudicada.

- Exemplo de um experimento mal planejado.

PROJETOS COMPLETAMENTE ALEATORIZADOS

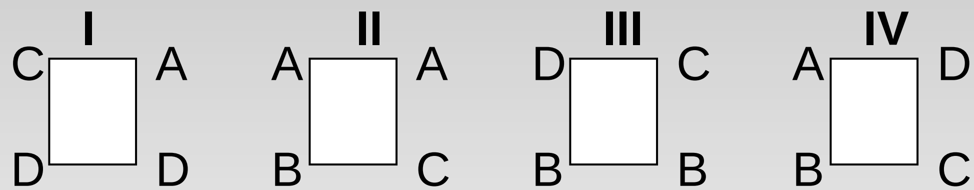
- **Uma segunda tentativa poderia ser um projeto completamente aleatorizado. Nesse tipo de projeto, a distribuição dos pneus nos carros é feita de modo completamente aleatória.**

- **Por exemplo, colocam-se numa caixa fichas representando os 16 pneus. Então, as 4 primeiras a serem retiradas seguem no carro 1, e assim por diante.**

- **Os resultados desse procedimento poderiam gerar o projeto que aparece a seguir:**

PROJETOS COMPLETAMENTE ALEATORIZADOS

	Carros			
	I	II	III	IV
Marcas e (Desgaste)	C(12)	A(14)	D(10)	A(13)
	A(17)	A(13)	C(11)	D(9)
	D(13)	B(14)	B(14)	B(8)
	D(11)	C(12)	B(13)	C(9)



O propósito da aleatorização é espalhar, sobre os totais de todas as marcas, qualquer efeito de carros ou de outras variáveis não-controladas.

Modelo estatístico p/ completamente aleatorizado

$$Y_{ij} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

onde

μ é a média geral,

β_j indica o efeito de cada marca,

ε_{ij} é o erro aleatório.

As suposições para a análise são:

$$\Sigma \beta_j = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{ij} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

Para esse modelo, os resíduos em relação à média geral podem ser decompostos da seguinte maneira:

$$\boxed{(y_{ij} - \bar{y}_{..}) = (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{.j})}$$

Elevando ao quadrado e efetuando o somatório, resulta:

$$\boxed{SQT \quad = \quad SQM \quad + \quad SQR}$$

Associadas aos seguintes GDL:

$$\boxed{(N - 1) \quad = \quad (a - 1) \quad + \quad (N - a)}$$

Nos interessa testar a hipótese:

H_0: $\beta_j = 0$ contra
H_1: $\beta_j \neq 0$ para algum j

Para tanto usamos o teste F, uma vez que pode ser demonstrado que quando $\beta_j = 0$ resulta: E(MQM) = E(MQR).

Para o cálculo das Somas Quadradas, usamos o formulário tradicional:

$$TC = \left(\sum T_{..}\right)^2 / N$$

$$SQM = \left(\sum T_{.j}^2 / a\right) - TC$$

$$SQT = \left(\sum y_{ij}^2\right) - TC$$

$$SQR = SQT - SQM$$

Para o exemplo, os totais de cada marca valem:

A	B	C	D	
17	14	12	13	
14	14	12	11	← Desgastes medidos em cada pneu
13	13	11	10	
13	8	9	9	
57	49	44	43	= 193

Assim, as somas quadradas resultam:

SQM = $(57^2 + 49^2 + 44^2 + 43^2) / 4 - 2328{,}06 = 30{,}69$

SQT = 2409,00 - 2328,06 = 80,94

SQR = 80,94 - 30,69 = 50,25

Tabela ANOVA p/ completamente aleatorizado

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F	F tab
Marcas	30,69	3	10,23	2,44	3,49 NS
Resíduo	50,25	12	4,19		
Total	80,94	15			

Para esse projeto, o *F* calculado < *F* tabelado.

Assim, *a hipótese nula não pode ser rejeitada !*

PROJETOS EM BLOCOS ALEATORIZADOS

- **Um exame mais cuidadoso do projeto completamente aleatorizado irá revelar algumas desvantagens.**

- **Por exemplo, nota-se que a marca** A **não foi usada no carro** III**, mas foi usada duas vezes no carro** II**, etc.**

- **Assim, pode estar embutido na marca** A **algum efeito que possa existir entre os carros** II **e** III**.**

PROJETOS EM BLOCOS ALEATORIZADOS

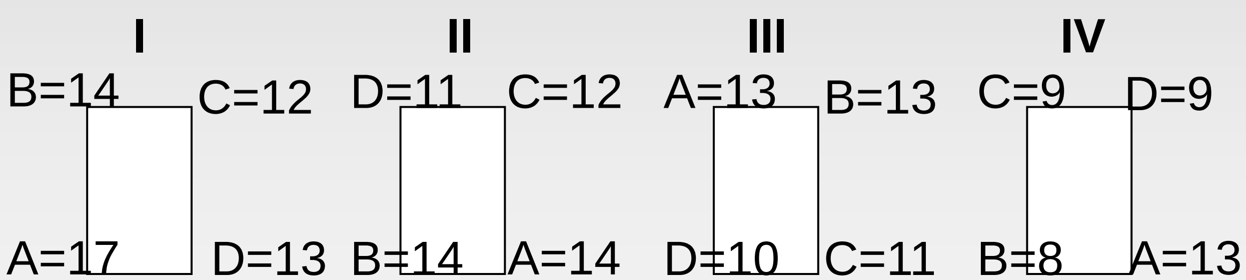
Seria interessante desenvolver uma estratégia para bloquear um possível efeito dos carros.

Isso pode ser feito usando um *Projeto em Blocos Aleatorizados*.

Nesse tipo de projeto, impõe-se que cada marca apareça um mesmo número de vezes em cada carro, conforme aparece no arranjo a seguir:

PROJETOS EM BLOCOS ALEATORIZADOS

	Carros			
	I	II	III	IV
Marcas e (Desgaste)	B(14)	D(11)	A(13)	C(9)
	C(12)	C(12)	B(13)	D(9)
	A(17)	B(14)	D(10)	B(8)
	D(13)	A(14)	C(11)	A(13)



Modelo estatístico em blocos aleatorizado:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

onde:

τ_i é acrescentado, ou melhor, é separado do termo de erro experimental;

τ_i indica o efeito dos carros, que antes não podia ser calculado apropriadamente.

As suposições para a análise são:

$$\tau_i \rightarrow N(0, \sigma_\tau^2) \quad ; \quad \varepsilon_{ij} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

Decomposição dos resíduos:

Para esse modelo, a decomposição dos resíduos leva às seguintes somas quadradas:

$$\boxed{SQT \;=\; SQC \;+\; SQM \;+\; SQR}$$

Indicando o número de carros e o número de marcas por "*a* ", os respectivos graus de liberdade resultam:

$$\boxed{(N - 1) = (a - 1) + (a - 1) + (N - 2a + 1)}$$

Teste de hipóteses:

A hipótese principal que queremos testar continua sendo em relação às marcas de pneu.

Mas neste projeto também podemos testar se há diferenças entre os carros.

Os cálculos aparecem a seguir:

Cálculos:

		Marcas				
		A	B	C	D	Totais
	I	17	14	12	13	56
Carros	II	14	14	12	11	51
	III	13	13	11	10	47
	IV	13	8	9	9	39
Totais		57	49	44	43	= 193

I		II		III		IV	
B=14	C=12	D=11	C=12	A=13	B=13	C=9	D=9
A=17	D=13	B=14	A=14	D=10	C=11	B=8	A=13

LOPP

Para fins didáticos, estamos usando as mesmas observações anteriores, apenas redistribuindo-as ao longo dos carros.

Assim, a SQT e a SQM continuam as mesmas.

Mas é preciso calcular:

SQC = $(56^2 + 51^2 + 47^2 + 39^2)/4$ - 2328,06 = 38,69

SQR =SQT- SQM- SQC = 80,94- 30,69- 38,69 = 11,56

Pode ser observado que a SQR diminuiu de 50,25 para 11,56 porque foi extraído o efeito dos carros (38,69).

Assim, o projeto em blocos aleatorizados efetivamente reduz a variância residual.

Tabela ANOVA p/ o blocos aleatorizados

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F	F tab
Marcas	30,69	3	10,23	7,90	3,86
Carros	38,69	3	12,90	10,00	3,86
Resíduo	11,56	9	1,28		
Total	80,94	15			

Agora a hipótese nula é rejeitada tanto para marcas como para carros. Ou seja, detecta-se um efeito significativo de marcas e carros.

QUADRADOS LATINOS

- Nesse exemplo, poderia se suspeitar também de um possível efeito da posição sobre o desgaste dos pneus.

- Pneus dianteiros e traseiros, e mesmo pneus localizados em lados distintos de um mesmo carro, podem apresentar desgastes diferentes.

QUADRADOS LATINOS

- No projeto em **blocos aleatorizados** as 4 marcas de pneus são distribuídas em um carro sem considerar a posição.

- Um projeto onde cada **tratamento (posição)** aparece uma e somente uma vez em cada **linha (carro)** e em cada **coluna (marca)** é chamado de **Quadrado Latino**.

QUADRADOS LATINOS

Marca e carro estão blocados
Marca e posição estão confundidos

I		II		III		IV	
1A	2B	1A	2B	1A	2B	1A	2B
3C	4D	3C	4D	3C	4D	3C	4D

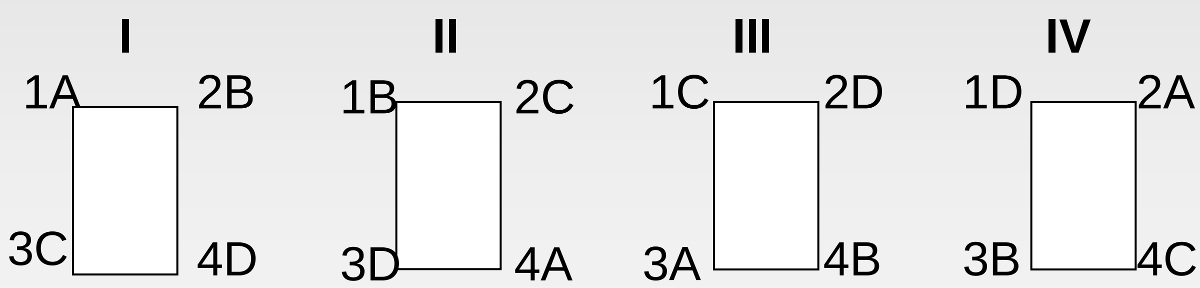
Marca e carro estão blocados
Marca e posição estão blocados

I		II		III		IV	
1A	2B	1B	2C	1C	2D	1D	2A
3C	4D	3D	4A	3A	4B	3B	4C

QUADRADOS LATINOS

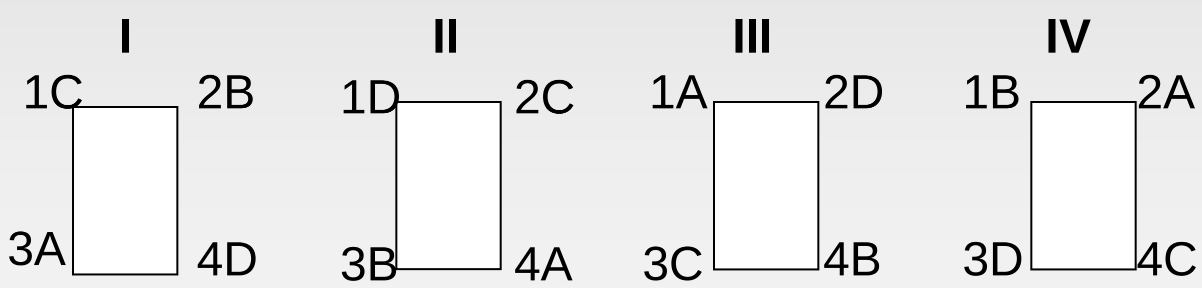
Marca e carro estão blocados
Marca e posição estão blocados

	I	II	III	IV
1	A	B	C	D
2	B	C	D	A
3	C	D	A	B
4	D	A	B	C



QUADRADOS LATINOS

Desgaste / Posição		Marcas: A	B	C	D	T_i	$T_{(k)}$
	I	3(17)	2(14)	1(12)	4(13)	56	1 44
Carros	II	4(14)	3(14)	2(12)	1(11)	51	2 49
	III	1(13)	4(13)	3(11)	2(10)	47	3 51
	IV	2(13)	1(8)	4(9)	3(9)	39	4 49
T_j		57	49	44	43	193	193



Modelo estatístico do Quadrado Latino:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{(k)} + \varepsilon_{ij}$$

Onde:

$\gamma_{(k)}$ é acrescentado, ou melhor, é separado do termo de erro experimental.

$\gamma_{(k)}$ indica o efeito da posição dos pneus, que antes não podia ser calculado propriadamente.

As suposições para a análise são:

$\Sigma\, \gamma_{(k)} = 0$; $\varepsilon_{ij} \rightarrow N(0, \sigma^2)$

Decomposição dos resíduos:

A decomposição dos resíduos leva às seguintes somas quadradas:

$$SQT = SQC + SQM + SQP + SQR$$

Indicando o número de carros, marcas e posições por "*a*", os respectivos graus de liberdade resultam:

$$(N - 1) = (a - 1) + (a - 1) + (a - 1) + (N - 3a + 2)$$

Teste de hipóteses:

- A hipótese principal que queremos testar continua sendo em relação às marcas de pneu.
- Mas neste projeto também podemos testar se há diferenças entre os carros ou entre as posições.
- Conforme mencionado, para fins didáticos, estamos usando as mesmas observações anteriores, redistribuídas ao longo dos carros.
- Assim, a SQT, a SQM e a SQC continuam as mesmas.

Cálculos:

A SQT, a SQM e a SQC continuam as mesmas

$$SQP = (44^2 + 49^2 + 51^2 + 49^2)/4 \ - \ 2328{,}06 = 6{,}69$$

$$SQR = SQT - SQM - SQC - SQP = 4{,}87$$

$$SQR = 80{,}94 - 30{,}69 - 38{,}69 - 6{,}69 = 4{,}87$$

Pode ser observado que a SQR diminuiu de 11,56 para 4,87 porque foi extraído o efeito das posições (6,69).

Assim, o projeto com Quadrado Latino reduz ainda mais a variância residual.

Tabela ANOVA p/ Quadrado Latino

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F	F tab
Marcas	30,69	3	10,23	12,4	4,76
Carros	38,69	3	12,90	15,7	4,76
Posição	6,69	3	2,23	2,7	4,76
Resíduo	4,87	6	0,82		
Total	80,94	15			

Novamente a hipótese nula é rejeitada tanto para marcas como para carros. A um nível de significância de 5% o efeito da posição não aparece como significativo.

Comparação Múltipla de Médias

Uma vez que Marca é um efeito significativo, poderíamos completar a análise fazendo uma comparação múltipla de médias. Para esse exemplo, resultaria:

D	C	B	A
10,75	11,00	12,25	14,25

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{0{,}82 / 4} = 0{,}45$$

Ld=3*0,45=1,36

LOPP

- O Quadrado Latino não permite estudar interação entre os fatores. Ele não deve ser usado quando se suspeita de interações significativas;
- Ele aproveita a interação para estudar um terceiro fator, ou seja, ele estuda três efeitos principais A, B e C;
- Quando deseja-se estudar a interação, sugere-se o projeto fatorial cruzado N=4*4*4=64;
- O fatorial completo permite estudar os efeitos A, B, C, AB, AC, BC e ABC;
- A vantagem do Quadrado Latino é que se trata de um experimento que exige poucos ensaios, e isso representa economia de tempo e dinheiro.

Aplicabilidade:

- **Projetos desse tipo só são possíveis quando todos os fatores têm um mesmo número de níveis, ou seja, deve ser um quadrado.**
- **Exemplos de quadrados latinos de ordem 4, 5 e 6 são:**

4 x 4

A	B	D	C
B	C	A	D
C	D	B	A
D	A	C	B

5 x 5

A	D	B	E	C
D	A	C	B	E
C	B	E	D	A
B	E	A	C	D
E	C	D	A	B

6 x 6

A	D	C	E	B	F
B	A	E	C	F	D
C	E	D	F	A	B
D	C	F	B	E	A
F	B	A	D	C	E
E	F	B	A	D	C

Outros exemplos de Quadrados Latinos

- **Desejamos determinar o efeito de 5 fertilizantes diferentes (A, B, C, D, E) sobre o crescimento de um tipo de cereal. E há um terreno que pode ser dividido em uma malha de 5 x 5 porções.**

- **Nesse caso, um arranjo tipo Quadrado Latino poderia ser utilizado para bloquear o efeito de algum gradiente de umidade ou de fertilidade que possa existir. Esses efeitos poderiam ser virtualmente eliminados usando o projeto que aparece a seguir:**

LOPP

Confundido com o sol
Blocado com a umidade

Umidade →

Sol ↓

	1	2	3	4	5
I	A	A	A	A	A
II	B	B	B	B	B
III	C	C	C	C	C
IV	D	D	D	D	D
V	E	E	E	E	E

Confundido com a umidade
Blocado com o sol

Umidade →

Sol ↓

	1	2	3	4	5
I	A	B	C	D	E
II	A	B	C	D	E
III	A	B	C	D	E
IV	A	B	C	D	E
V	A	B	C	D	E

Quadrado Latino: aloca os cereais (letras) sem repetir na linha e na coluna
O efeito do cereal fica blocado com o sol e blocado com a umidade

		Colunas				
		1	2	3	4	5
Linhas	I	A	B	C	D	E
	II	C	D	E	A	B
	III	E	A	B	C	D
	IV	B	C	D	E	A
	V	D	E	A	B	C

Quadrados latinos - outro exemplo:

- **Testar quatro aditivos para redução da carga poluente em automóveis. Para efetuar o estudo, pode ser necessário usar quatro carros e quatro motoristas, que podem ter algum efeito sobre os resultados.**

- **Assim, para impedir que as diferenças carro-a-carro e motorista-a-motorista terminem inflacionando o erro, podemos usar o Quadrado Latino que aparece a seguir:**

Quadrado latino:

Aditivos		Carros			
		1	2	3	4
	I	A	B	D	C
Moto-	II	D	C	A	B
rista	III	B	D	C	A
	IV	C	A	B	D

QUADRADOS GRECO-LATINOS

- **Os Quadrados Greco-Latinos são projetos** $a \times a$ **que permitem analisar quatro fatores cada um deles com "*a*" níveis.**
- **Para obter um quadrado Greco-Latino é preciso superpor dois Quadrados Latinos que sejam ortogonais entre si.**

QUADRADOS GRECO-LATINOS - Exemplo:

Um engenheiro está medindo o ganho em um processo químico.

Os fatores principais são:

- concentração de ácido (1, 2, 3, 4, 5),

- concentração de catalisador (α, β, γ, δ, ε) e

- tempo de espera (A, B, C, D, E).

Para efetuar todos os ensaios, é necessário usar 5 lotes de matéria prima (I, II, III, IV, V).

QUADRADOS GRECO-LATINOS - Exemplo:

O experimento foi rodado seguindo um arranjo do tipo Quadrado Greco-Latino e os resultados aparecem a seguir:

		Concentração de Ácido				
		1	2	3	4	5
Lotes	I	Aα=26	Bβ=16	Cγ=19	Dδ=16	Eε=13
	II	Bγ=18	Cδ=21	Dε=18	Eα=11	Aβ=21
	III	Cε=20	Dα=12	Eβ=16	Aγ=25	Bδ=13
	IV	Dβ=15	Eγ=15	Aδ=22	Bε=14	Cα=17
	V	Eδ=10	Aε=24	Bα=17	Cβ=17	Dγ=14

Quadrado Greco-latino:

Como pode ser visto, há dois Quadrados Latinos superpostos.

Um deles escrito nas letras A,...,E **e o outro escrito nas letras** $\alpha,\ldots,\varepsilon$**.**

O resultado é um quadrado Greco-Latino, e será possível avaliar o efeito de todos os 4 fatores listados.

Cálculos:

Iniciamos calculando os totais de cada tratamento:

Ácido	Catalisador	Tempo	Lotes
1 = 89	α = 83	A = 118	I = 90
2 = 88	β = 85	B = 78	II = 89
3 = 92	γ = 91	C = 94	III = 86
4 = 83	δ = 82	D = 75	IV = 83
5 = 78	ε = 89	E = 65	V = 82
430	430	430	430

LOPP

Cálculos:

$TC = 430^2 / 25 = 7396$

$SQTot = (\sum y_{ij}^2) - TC = 7832 - 7396 = 436,0$

$SQA = [(89^2 + ...) / 5] - TC = 24,4$

$SQC = [(83^2 + ...) / 5] - TC = 12,0$

$SQ_{Temp} = [(118^2 + ...) / 5] - TC = 342,8$

$SQL = [(90^2 + ...) / 5] - TC = 10,0$

$SQR = SQTot - SQA - SQC - SQ_{Temp} - SQL = 46,8$

Tabela ANOVA

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F	F tab
Ácido	24,4	4	6,1	1,04	3,84
Catalisador	12,0	4	3,0	0,51	3,84
Tempo	342,8	4	85,7	14,65	3,84
Lotes	10,0	4	2,5	0,43	
Resíduo	46,8	8	5,85		
Total	436,0	24			

A um nível de significância de 5% apenas o Tempo de Espera aparece como efeito significativo.

LOPP

Aplicabilidade:

- **Projetos desse tipo só são possíveis quando todos os fatores têm um mesmo número de níveis, ou seja, deve ser um quadrado.**
- **Exemplos de quadrados latinos de ordem 4, 5 e 6 são:**

4 x 4

A	B	D	C
B	C	A	D
C	D	B	A
D	A	C	B

5 x 5

A	D	B	E	C
D	A	C	B	E
C	B	E	D	A
B	E	A	C	D
E	C	D	A	B

6 x 6

A	D	C	E	B	F
B	A	E	C	F	D
C	E	D	F	A	B
D	C	F	B	E	A
F	B	A	D	C	E
E	F	B	A	D	C