

# 4. Generalização dos Projetos Fatoriais

## 4. Generalização dos projetos fatoriais

Os resultados do Projeto Fatorial de 2 fatores podem ser estendidos para o caso onde há vários fatores:

Fator A,        a níveis  
Fator B,        b níveis  
Fator C,        c níveis  
:  
n observações por parcela

O número total de observações  $N = a \times b \times c \times \dots \times n$

## Modelo estatístico:

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

$$\begin{array}{ll} i = 1, a & k = 1, c \\ j = 1, b & l = 1, n \end{array}$$

onde:  $\mu$  é a média geral;

$\tau_i$  é o efeito do i-ésimo nível de

$\beta_j$  é o efeito do j-ésimo nível de

$(\tau\beta_{ij})$  é o efeito da interação AB;

:

$\varepsilon_{ijkl}$  é o erro aleatório.

**Suposições:**  $\varepsilon_{ijkl} \rightarrow N(0, \sigma)$

## Hipóteses a serem testadas:

Para o fator A:

$$H_0: \tau_i = 0$$

$$H_1: \tau_i \neq 0 \quad \text{para algum } i$$

:

Para a interação AB:

$$H_0: \tau\beta_{ij} = 0$$

$$H_1: \tau\beta_{ij} \neq 0 \quad \text{para algum } ij$$

:

Para a interação ABC:

$$H_0: \tau\beta\gamma_{ijk} = 0$$

$$H_1: \tau\beta\gamma_{ijk} \neq 0 \quad \text{para}$$

algum  $ijk$

## Formulário para os cálculos

$$TC = \frac{(T_{\dots})^2}{abcn}$$

$$SQA = \frac{\sum (T_{i\dots})^2}{bcn} - TC$$

$$SQB = \frac{\sum (T_{.j\dots})^2}{acn} - TC$$

$$SQC = \frac{\sum (T_{\dots k})^2}{abn} - TC$$

$$SQAB = \frac{\sum (T_{ij\dots})^2}{cn} - TC - SQA - SQB$$

$$SQAC = \frac{\sum (T_{i.k\dots})^2}{bn} - TC - SQA - SQC$$

$$SQBC = \frac{\sum (T_{.jk\dots})^2}{an} - TC - SQB - SQC$$

$$SQ_{ABC} = \frac{\sum (T_{ijk.})^2}{n} - TC - SQA - SQB - SQC - SQAB - SQAC - SQBC$$

$$SQR = \sum y_{ijkl}^2 - \frac{\sum (T_{ijk.})^2}{n} ; \quad SQT = \sum y_{ijkl}^2 - TC$$

## VERIFICAÇÃO

$$SQT = SQA + SQB + SQC + SQAB + \dots + SQR$$

# Tabela ANOVA p/ projetos cruzados de 3 fatores

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	GDL	Médias Quadradas	Teste F
A	SQA	(a-1)	MQA	MQA/MQR
B	SQB	(b-1)	MQB	MQB/MQR
C	SQC	(c-1)	MQC	MQC/MQR
AB	SQAB	(a-1)(b-1)	MQAB	MQAB/MQR
AC	SQAC	(a-1)(c-1)	MQAC	MQAC/MQR
BC	SQBC	(b-1)(c-1)	MQBC	MQBC/MQR
ABC	SQABC	(a-1)(b-1)(c-1)	MQABC	MQABC/MQR
Erro	SQR	abc(n-1)	MQR	
Total	SQT	abcn-1		

Se  $F$  calculado  $>$   $F$  tabelado  $\rightarrow$  Efeito correspondente é significativo

# Observações

- O Valor esperado da MQR é igual a variância:
- $E(MQR) = \sigma^2$
- Se um fator ou interação não é significativo, o valor esperado de sua MQ é igual ao valor esperado da MQR
- Se não houver repetições ( $n = 1$ ) uma possibilidade é usar a MQ da interação ABC como estimativa da MQR



## Exemplo

- Um fabricante de refrigerantes está estudando o efeito do % de carbonatação (A), pressão de enchimento (B) e velocidade da linha (C) sobre o volume do refrigerante.
- Para cada combinação foram realizadas duas repetições totalizando  $N = 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$
- Os dados estão apresentados na tabela a seguir:

% Carbonatação (A)	Pressão de Enchimento (B) 20 psi				25 psi				Ti...
	Velocidade (C) 100		120		100		120		
10	-1 (-1)	0	-3 (-4)	-1	1 (2)	1	-1 (-1)	0	-4
12	2 (3)	1	0 (1)	1	6 (11)	5	2 (5)	3	20
14	7 (13)	6	5 (9)	4	10 (21)	11	7 (16)	9	59
T.j..	21				54				
T..k.	T..1. = 49		T..2. = 26						T.... = 75

Tij..

Ti.k.

T.jk.

	B1 (20)	B2 (25)		C1 (100)	C2 (120)		C1 (100)	C2 (120)			
A1 (10)	-5	1	-4	A1 (10)	1	-5	-4	B1 (20)	15	6	21
A2 (12)	4	16	20	A2 (12)	14	6	20	B2 (25)	34	20	54
A3 (14)	22	37	59	A3 (14)	34	25	59		49	26	
	21	54			49	26					

Tij..

Ti.k.

T.jk.

	B1 (20)	B2 (25)			C1 (100)	C2 (120)			C1 (100)	C2 (120)	
A1 (10)	-5	1	-4	A1 (10)	1	-5	-4	B1 (20)	15	6	21
A2 (12)	4	16	20	A2 (12)	14	6	20	B2 (25)	34	20	54
A3 (14)	22	37	59	A3 (14)	34	25	59		49	26	
	21	54			49	26					

$$TC = \frac{(T_{...})^2}{abcn} = \frac{75^2}{24} = 234,375$$

$$SQA = \frac{\sum(T_{i...})^2}{bcn} - TC = \frac{(-4)^2 + (20)^2 + (59)^2}{8} - 234,38 = 252,750$$

:

$$SQAB = \frac{\sum(T_{ij..})^2}{cn} - TC - SQA - SQB = \frac{(-5)^2 + (4)^2 + \dots + (37)^2}{4} - 234,38 -$$

$$SQA - SQB = 5,250$$

:

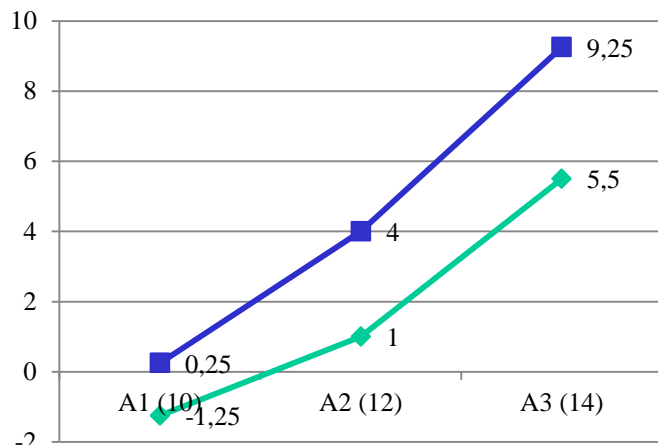
$$SQABC = \frac{(-1)^2 + (3)^2 + \dots + (16)^2}{2} - TC - SQA - SQB - SQC -$$

$$SQAB - SQAC - SQBC = 1,083$$

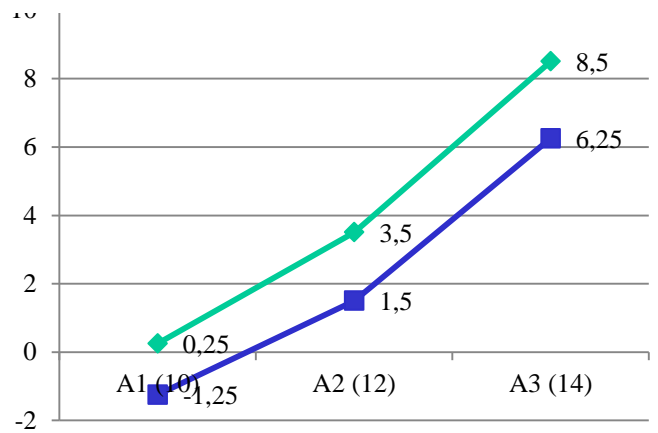


# Tabela Anova

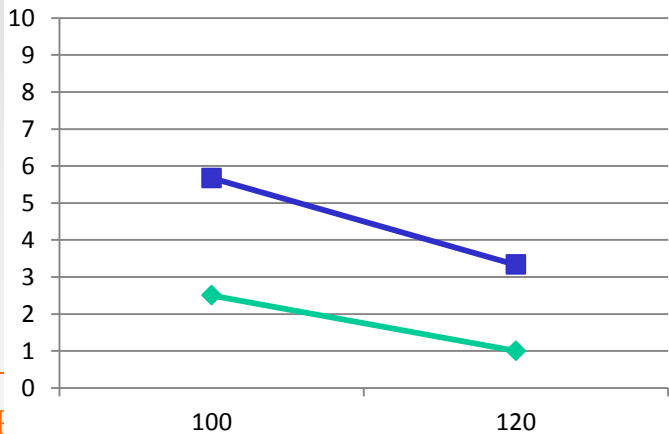
Fonte	SQ	GDL	MQ	F calc.	F tab.
A: % Carb.	252,75	2	126,38	178,4 *	3,89
B: Pressão	45,38	1	45,38	64,1 *	4,75
C: Veloc.	22,04	1	22,04	31,1 *	4,75
AB	5,25	2	2,63	3,7 (*)	3,89
AC	0,58	2	0,29	0,4	3,89
BC	1,04	1	1,04	1,5	4,75
ABC	1,08	2	0,54	0,8	3,89
Erro	8,50	12	0,71		
Total	336,63	23			



◆ B1 (20)  
■ B2 (25)



◆ C1 (100)  
■ C2 (120)



◆ 20  
■ 25

Tij..

	B1 (20)	B2 (25)	
A1 (10)	-1,25	0,25	-0,50
A2 (12)	1,00	4,00	2,50
A3 (14)	5,50	9,25	7,38
	1,75	4,50	

Ti.k.

	C1 (100)	C2 (120)	
A1 (10)	0,25	-1,25	-0,50
A2 (12)	3,50	1,50	2,50
A3 (14)	8,50	6,25	7,38
	4,08	2,17	

T.jk.

	C1 (100)	C2 (120)	
B1 (25)	2,50	1,00	1,75
B2 (30)	5,67	3,33	4,50
	4,08	2,17	



LOPP

# Projetos com fatores aninhados

Considere o seguinte experimento:

1			Materiais 2			3		
Temperatura			Temperatura			Temperatura		
50	75	100	50	75	100	50	75	100
x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x

Trata-se de um projeto fatorial *cruzado*, cuja tabela também poderia ser apresentada como:

		Materiais		
		1	2	3
	50	x x	x x	x x
Temper.	75	x x	x x	x x
	100	x x	x x	x x

**Mas agora vamos analisar o seguinte experimento:**

1			Materiais 2			3		
Temperatura			Temperatura			Temperatura		
40	50	60	100	120	140	60	75	90
x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x

**Agora, Materiais e Temperatura *não* estão cruzados**

**Conforme o material (Fator A), os níveis de Temperatura (Fator B) são *diferentes*.**

**Nesse caso temos um experimento com Fatores Aninhados.**

**Diz-se que os níveis do fator B estão aninhados dentro dos níveis do fator A**

**Não é possível verificar a existência de uma interação AB.**

**MODELO ESTATÍSTICO:**

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}$$

**Como fazer o cálculo das Médias Quadradas ?**



- Usar o mesmo formulário do Projeto cruzado.
- Aglutinar algumas Somas Quadradas para fazer a análise correta

Projeto Fatorial A e B cruzados		Projeto Fatorial Aninhado B aninhado em A			
SQ	GDL	SQ	GDL	MQ	F
SQA	(a-1)	SQA	(a-1)	MQA	MQA/MQR
SQB	(b-1)	} SQB(A)	a(b-1)	MQB(A)	MQB(A)/MQR
SQAB	(a-1)(b-1)				
SQR	ab(n-1)	SQR	ab(n-1)	MQR	
SQT	abn-1	SQT	abn-1		

# Experimentos com fatores aninhados e cruzados

Em certos experimentos pode ocorrer de alguns fatores estarem cruzados e outros aninhados.

## Exemplo

Uma fábrica tem produzido azulejos que têm se mostrado muito quebradiços (baixa resistência). Os engenheiros desconfiam que 3 fatores podem afetar a resistência:

**A: Quantidade de Feldspato**

**B: Tipo de Aglutinante (3 fornecedores)**

**C: Quantidade de Aglutinante**

- **Decide-se rodar um experimento envolvendo esses fatores. Observa-se que cada fornecedor de aglutinante sugere uma quantidade ideal de aplicação de seu produto.**
- **Mas como a quantidade de aglutinante pode afetar a resistência à tração, usa-se dois níveis deste fator: um nível 10% abaixo da indicação do respectivo fornecedor e outro 10% acima. Os ensaios revelaram:**

Tipo de Aglutinante							
	B1		B2		B3		Ti...
	Quantidade C1(9)	Quantidade C2(11)	Quantidade C1(18)	Quantidade C2(22)	Quantidade C1(27)	Quantidade C2(33)	
A1	10,0	13,4	13,6	13,7	13,5	14,4	146,8
	11,0	12,6	11,0	12,4	10,2	11,0	
A2	14,8	13,9	13,8	16,7	12,3	14,7	177,0
	16,5	15,6	15,0	14,9	15,5	13,6	
A3	17,2	17,6	18,0	16,6	14,5	13,7	200,4
	14,4	19,4	17,6	17,0	18,8	15,6	
T.j..	176,1		180,3		167,8		524,2

T..k.  $\Rightarrow$  T..1. = 257,7 ; T..2. = 266,5

	Tij..		
	B1	B2	B3
A1	47,0	50,7	49,1
A2	60,5	60,4	56,1
A3	68,6	69,2	62,6

	Ti.k.	
	C1	C2
A1	69,3	77,5
A2	87,9	89,1
A3	100,5	99,9

	T.jk.	
	C1	C2
B1	83,9	92,2
B2	89,0	91,3
B3	84,8	83,0

$$TC = (524,2)^2 / 36 = 7632,934$$

$$SQB = \frac{(176,1)^2 + (180,3)^2 + (167,8)^2}{12} - TC = 6,74$$

$$SQBC = \frac{(83,9)^2 + (89,0)^2 + \dots + (83,0)^2}{6} - TC - SQB - SQC = 4,30$$

$$SQT = (10,0)^2 + (11,0)^2 + \dots + (15,6)^2 ] - TC = 198,35$$

C aninhado em B → Aglutinar Somas Quadradas

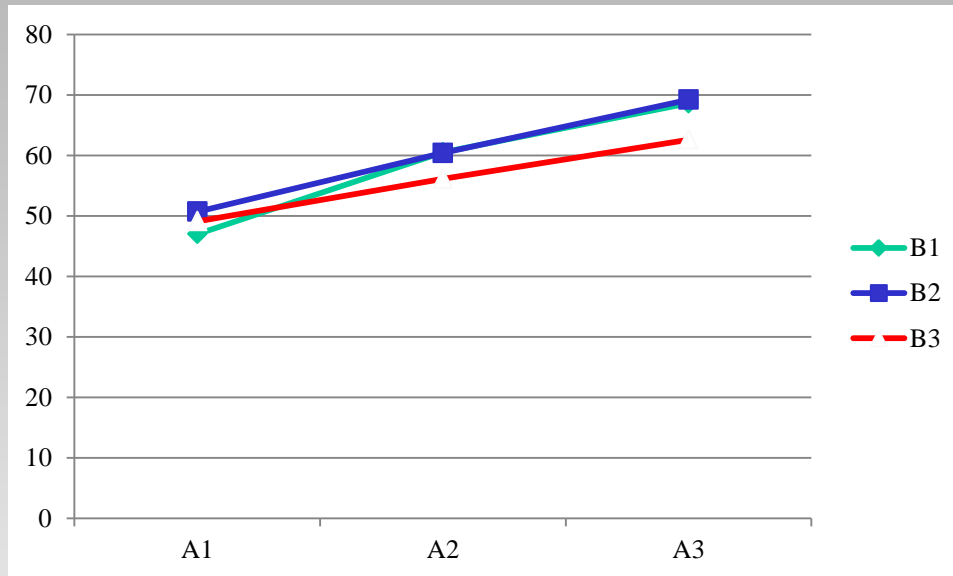
Cruzado		Aninhado	
SQ	GDL	SQ	GDL
SQA = 120,35	2	SQA	2
SQB = 6,74	2	SQB	2
SQAB = 4,79	4	SQAB	4
SQC = 2,15	1	SQC(B)	3
SQBC = 4,30	2	(SQC+SQBC)=6,45	
SQAC = 3,60	2	SQAC(B)	6
SQABC = 12,90	4	SQAC+SQABC=16,50	
SQR = 43,51	18	SQR	18
SQT = 198,35	35	SQT	35

## Tabela Anova para o exemplo

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F	F tab
A: Feldsp.	120,35	2	60,17	24,9	3,55
B: Tipo de Agl.	6,74	2	3,37	1,4	3,55
AB	4,79	4	1,20	0,5	2,93
C(B)	6,45	3	2,15	0,9	3,16
AC(B)	16,50	6	2,75	1,1	2,66
Erro	43,51	18	2,42		
Total	198,35	35			

**Apenas o fator A (Quant. de Feldspato) é significativo**

# Gráfico de 2 fatores



	A1	A2	A3
B1	47	60,5	68,6
B2	50,7	60,4	69,2
B3	49,1	56,1	62,6
	48,93	59,00	66,80

- Para se maximizar a resistência à tração, deve-se aumentar a quantidade de feldspato