3- Projetos Fatoriais

- **Exemplo do que se faz na indústria:**
- **Uma empresa estava interessada em aumentar o teor de pureza de uma substância química. Os dois fatores mais importantes que influenciavam o teor de pureza eram a temperatura e a pressão do reator.**

***Objetivo*:**

determinar os níveis de temperatura e pressão que maximizassem o teor de pureza.

***Como*:**

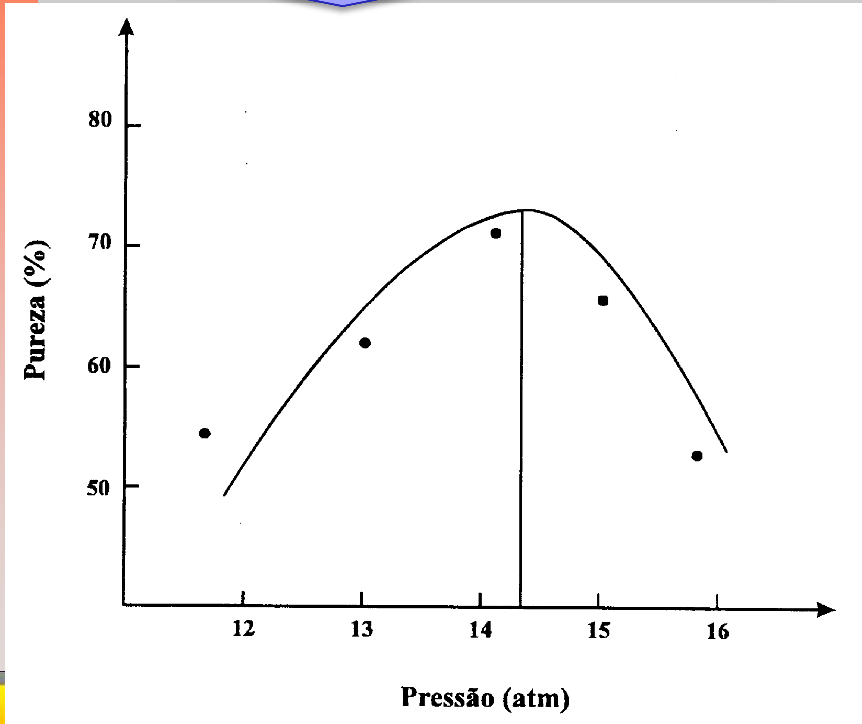
***1.* fixar a temperatura em 65 ºC e variar pressão;**

***2.* fixar a melhor pressão, variar a temperatura obtendo a resposta.**

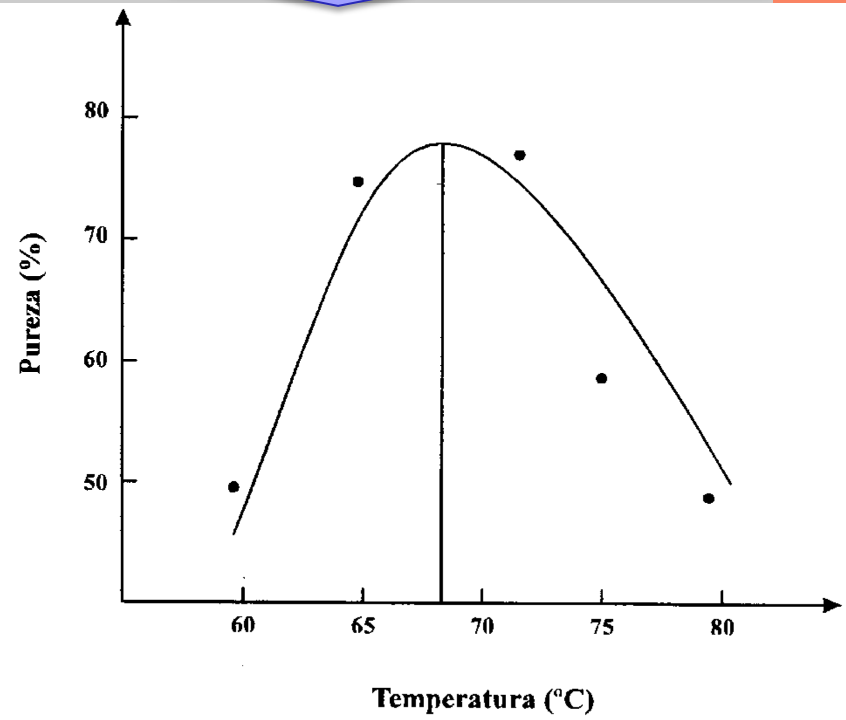
Gráficos do exemplo

– **Neste exemplo os fatores foram testados um de cada vez**

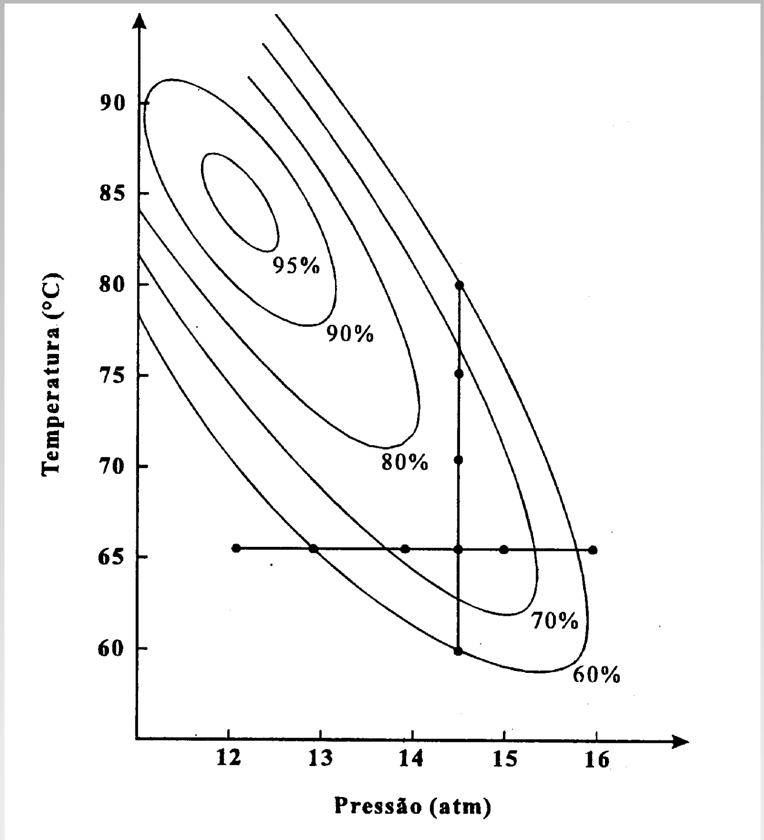
Temperatura fixada em 65ºC



Pressão fixada em 14,3 atm



Gráficos do exemplo



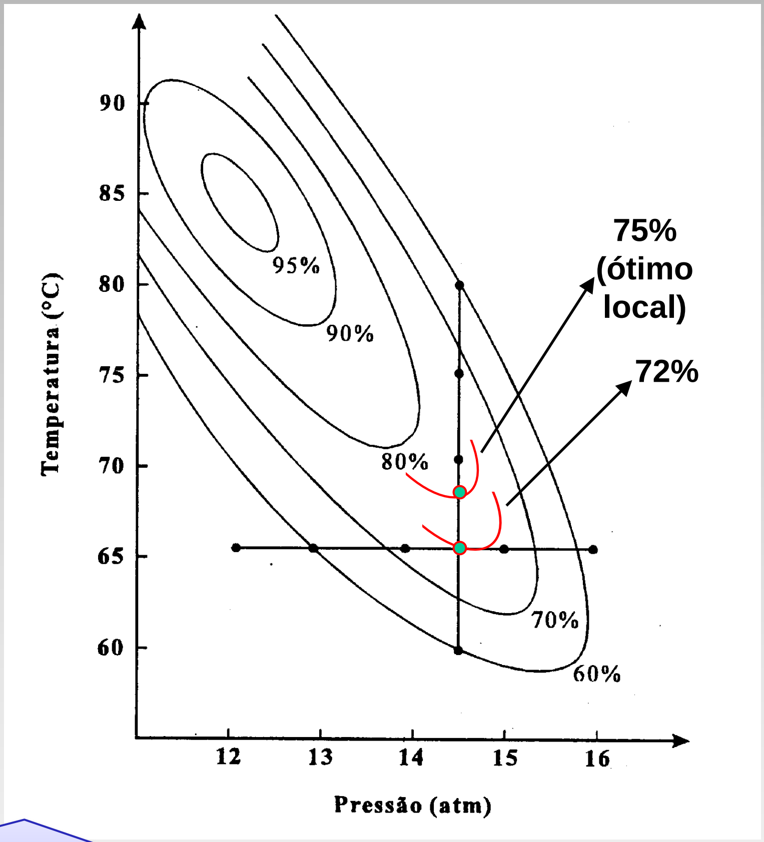


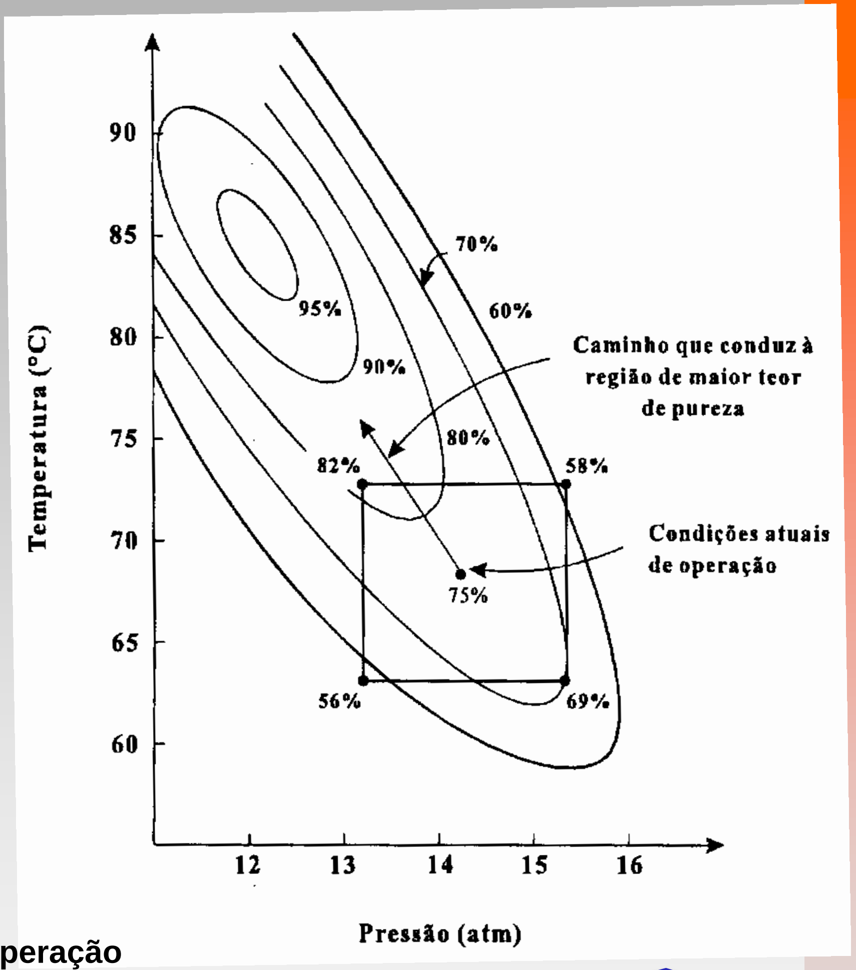
Gráfico com os fatores controláveis (FC)
testados um de cada vez (5 níveis cada)

LOPP

Gráficos do exemplo

Condições operacionais atuais:

- Temperatura: 68°C
- Pressão: 14,3 atm
- Pureza: 75%



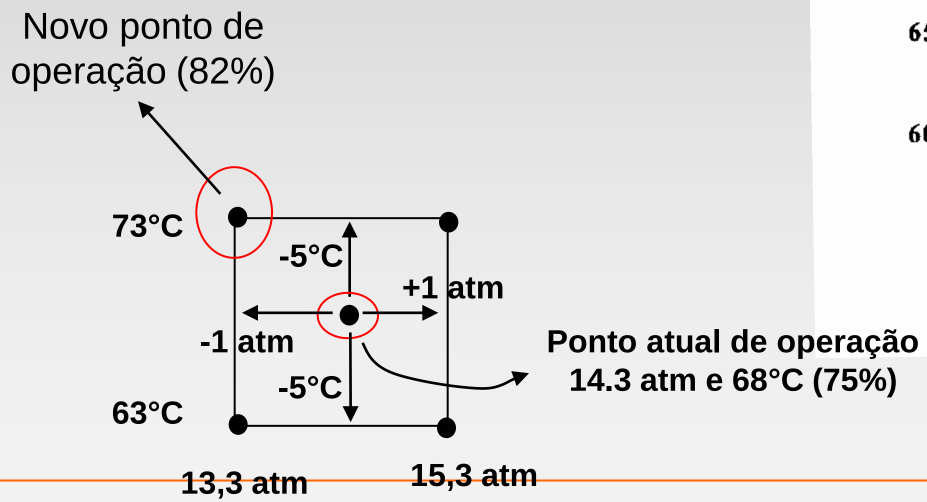


Gráfico com os FC testados ao mesmo tempo (2 níveis cada)

LOPP

Projetos fatoriais

– Muitos experimentos envolvem o estudo de dois ou mais fatores.

– Se todas as combinações de níveis dos fatores são investigadas, então tem-se um projeto fatorial (quadrado).

– Cada uma das possíveis combinações de níveis é chamada de “Tratamento” ou “setup” resultando

– N = a x b

LOPP

Projetos fatoriais

Por exemplo, sejam os dados da tabela a seguir:

	B1	B2	Média
A1	20	30	25
A2	40	52	46
Média	30	41	

O efeito principal do fator A é definido como a mudança que aparece na variável de resposta quando muda-se o nível deste fator, independente do nível do fator B logo trabalha-se com a média

LOPP

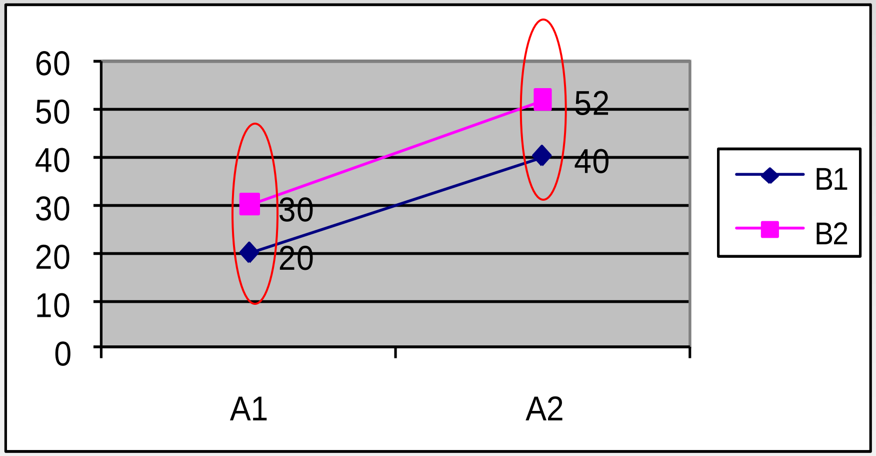
Projetos fatoriais

– **Efeito A = média A2 –média A1**

– **Efeito A =** $\frac{40+52}{2} - \frac{20+30}{2}$ **= 46 - 25 =21**

– **Passando do nível A1 para o nível A2 há uma mudança média na resposta de 21 unidades, independente dos niveis do fator B.**

	B1	B2	Média
A1	20	30	25
A2	40	52	46
Média	30	41	



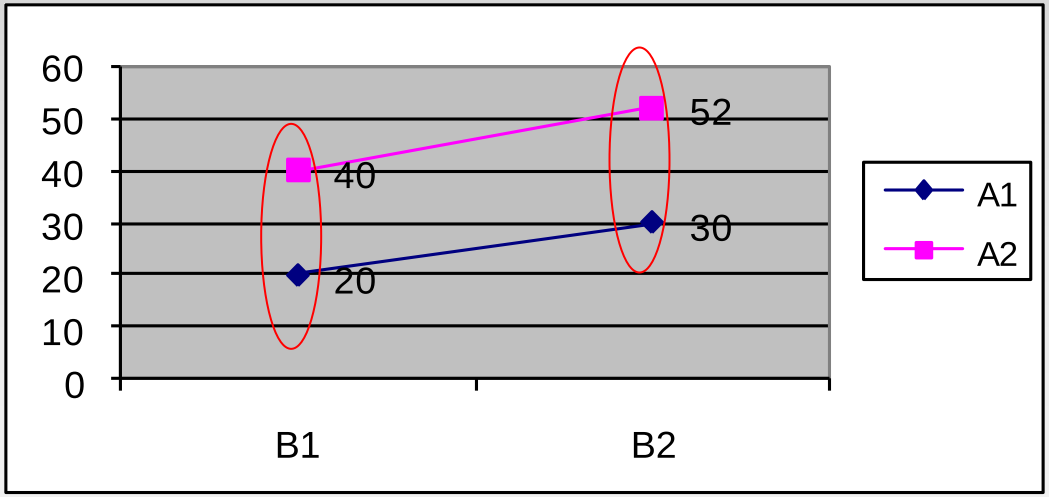
LOPP

Projetos fatoriais

– **Efeito B = média B2 - média B1**

– **Efeito B =** $\dfrac{30+52}{2} - \dfrac{20+40}{2}$ **= 41 - 30 = 11**

	B1	B2	Média
A1	20	30	25
A2	40	52	46
Média	30	41	



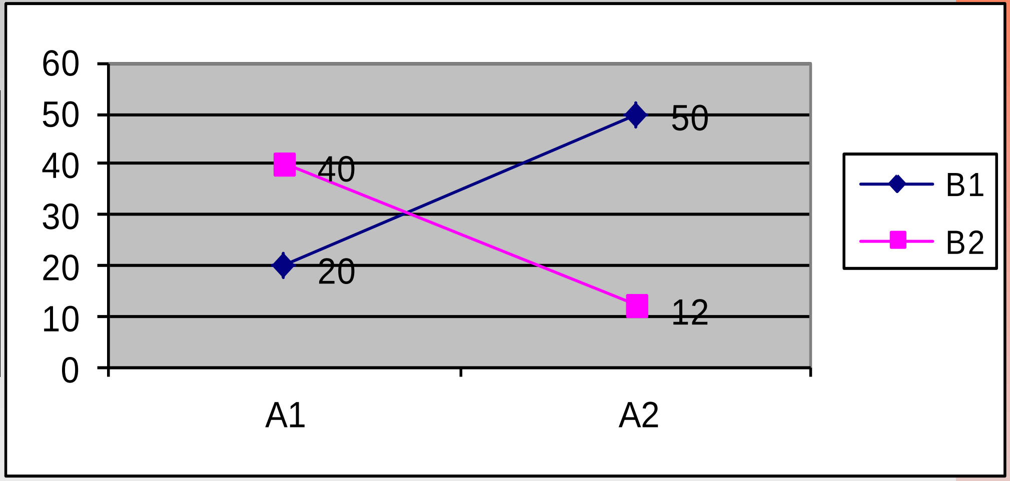
LOPP

Projetos fatoriais

– **Em alguns experimentos a diferença na resposta observada quando se modifica os níveis de um dos fatores irá depender do nível do outro fator.**

– **Por exemplo:**

	B1	B2	Média
A1	20	40	30
A2	50	12	31
Média	35	26	



– **Nesse caso, onde as retas não são paralelas, diz-se que há uma interação entre A e B.**

LOPP

Projetos fatoriais

– **Os gráficos de dois fatores são úteis para esclarecer a natureza da interação.**

– **Quando a interação é forte, os efeitos principais têm pouco interesse prático, por exemplo, para esses dados:**

	B1	B2	Média
A1	20	40	30
A2	50	12	31
	30	-28	

– **Efeito A =** $\frac{50+12}{2} - \frac{20+40}{2}$ **= 1**

– **Efeito A = 31 – 30 = 1**

– **O fator A tem um efeito pequeno? Errado!**

- **O fator A tem um efeito pronunciado, mas esse efeito depende do nível do fator B:**
- **Em B1 Efeito de A = 50 - 20 = 30**
- **Em B2 Efeito de A = 12 - 40 = -28**

Vantagens dos experimentos fatoriais

– **Comparando:**

	B1	B2
A1	xx	xx
A2	xx	

Um-fator-de-cada-vez

	B1	B2
A1	x	x
A2	x	x

Fatorial Cruzado

– **Fatoriais cruzados são mais econômicos;**

– **Fatoriais cruzados permitem que se avalie efeitos principais e efeitos de interações.**

Two-way Anova

– Os experimentos fatoriais mais simples envolvem dois fatores;
– Fator A com "a" níveis e Fator B com "b" níveis.
– Cada repetição completa do experimento envolve “N= a x b" ensaios, onde:
– a é o número de níveis do fator A
– b é o número de níveis do fator B

LOPP

Two-way Anova

		Fator B			
		1	2	...	b
	1	Y_{111}, Y_{112} , Y_{11n}	Y_{121}, Y_{122} , Y_{12n}	...	Y_{1b1}, Y_{1b2} , Y_{1bn}
Fator A	2	Y_{211}, Y_{212} , Y_{21n}	Y_{221}, Y_{222} , Y_{22n}		: :
	: :	: :			: :
	a	Y_{a11}, Y_{a12} , Y_{a1n}	...	...	Y_{ab1}, Y_{ab2} , Y_{abn}

LOPP

Modelo estatístico

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

μ é a média geral;

τ_i é o efeito do i-ésimo nível de A;

β_j é o efeito do j-ésimo nível de B;

$(\tau\beta_{ij})$ é o efeito da interação AB;

ε_{ijk} é o erro aleatório.

i = 1, a

j = 1, b

k = 1, n

– **Suposições:** $\varepsilon_{ijk} \rightarrow N(0,\sigma)$

Hipóteses a serem testadas

– **Para o fator A:** H_0: $\tau_i = 0$

H_1: $\tau_i \neq 0$ para algum *i*.

– **Para o fator B:** H_0: $\beta_j = 0$

H_1: $\beta_j \neq 0$ para algum *j*.

– **Para a interação AB:** H_0: $(\tau\beta)_{ij} = 0$

H_1: $(\tau\beta)_{ij} \neq 0$ para algum *ij*.

LOPP

Formulário para os cálculos

$$TC = \frac{(T\ldots)^2}{abn}$$

$$SQA = \sum_{i=1}^{a} \frac{(T_{i..})^2}{bn} - TC$$

Verificação:
SQT = SQA + SQB + SQAB + SQR

$$SQB = \sum_{j=1}^{b} \frac{(T_{.j.})^2}{an} - TC$$

$$SQAB = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{(T_{ij.})^2}{n} - TC - SQA - SQB$$

$$SQR = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{(T_{ij.})^2}{n}$$

$$SQT = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - TC$$

LOPP

Tabela ANOVA para projetos de 2 fatores

Fonte de variação	Soma dos quadrados	GL	Médias quadradas	Teste F
A	SQA	(a-1)	MQA	MQA / MQR
B	SQB	(b-1)	MQB	MQB / MQR
AB	SQAB	(a-1)(b-1)	MQAB	MQAB / MQR
Erro	SQR	ab(n-1)	MQR	
Total	SQT	abn-1		

$$F_{calc} = \frac{Variância \;\; entre \; grupos}{Variância \;\; dentro \; do \; grupo} = \frac{MQG}{MQR}$$

Tabela ANOVA para projetos de 2 fatores

– **O valor esperado da MQR é igual a variância:**

$$E(MQR)=\sigma^2$$

– **Se um fator não é significativo, o valor esperado de sua MQ_{fator} é igual ao valor esperado da MQR_{erro}**

– **Se um fator é significativo, o valor esperado de sua MQG_{fator} é maior que o valor esperado da MQR**

– **Se** $F_{calc} > F_{tab} = F_{\alpha,k-1,N-k}$ **ou valor-p<0,05 → Efeito é significativo**

– **O valor de F tabelado é:** $F_{tab} = F_{\alpha,GL_{numerador},GL_{denomnador}}$

LOPP

Exemplo

- **Suspeita-se que a máxima voltagem de saída (valor nominal=127V) de um tipo de bateria é afetada pelo material usado nas placas e pela temperatura.**
- **Foram investigados 3 tipos de materiais (a=3) e três diferentes temperaturas (b=3)**
- **Quatro repetições completas (n=4) de um experimento fatorial cruzado foram rodadas em laboratório e os seguintes dados foram obtidos.**
- **O número total de ensaios**

$a = 3 \quad b = 3 \quad n = 4$

- **N=a x b x n = 3 x 3 x 4 = 9 x 4 = 36**

LOPP

Exemplo

Material (A)	Temperatura (B) 50	65	80	Ti.. =
1	130 155 74 180 **539** **(134,75)**	34 40 80 75 **229** **(57,25)**	20 70 82 58 **230** **(57,50)**	998 (83,17)
2	150 188 159 126 **623** **(155,75)**	151 137 121 130 **539** **(134,75)**	50 100 83 60 **293** **(73,25)**	1455 (121,25)
3	138 110 168 160 **576** **(144,00)**	174 120 150 139 **583** **(145,75)**	96 104 82 60 **342** **(85,50)**	1501 (125,08)
T.j. =	1738 (144,83)	1351 (112,58)	865 (72,08)	3954 (109,83)

$a = 3 \quad b = 3 \quad n = 4$

LOPP

Exemplo

$$\text{TC} = \frac{(T...)^2}{abn}$$

$$\text{TC} = \frac{(3954)^2}{36} = 434281$$

$$\text{SQA} = \frac{\sum (T_{i..})^2}{bn} - TC$$

$$\text{SQA} = \frac{(998)^2}{12} + \frac{(1455)^2}{12} + \frac{(1501)^2}{12} - 434281 = 12888$$

$$\text{SQB} = \frac{\sum (T_{.j.})^2}{an} - TC$$

$$\text{SQB} = \frac{(1738)^2}{12} + \frac{(1351)^2}{12} + \frac{(865)^2}{12} - 434281 = 31892$$

Exemplo

$$\text{SQAB} = \frac{\sum (T_{ij.})^2}{n} - TC \text{ - SQA - SQB}$$

$$\text{SQAB} = \frac{(539)^2}{4} + \frac{(229)^2}{4} + \ldots + \frac{(342)^2}{4} - 434281 - 12888 - 31892 = 8187$$

$$\text{SQT} = \sum y_{ijk}^2 - TC$$

$$\text{SQT} = \sum y_{ijk}^2 - 434281 = 71611$$

SQR = SQT - SQA - SQB - SQAB

$$\text{SQR} = 71611 - 12888 - 31892 - 8187 = 18644$$

LOPP

Exemplo

$$F_{tab_A} = F_{0,05;2;27} = 3{,}35$$

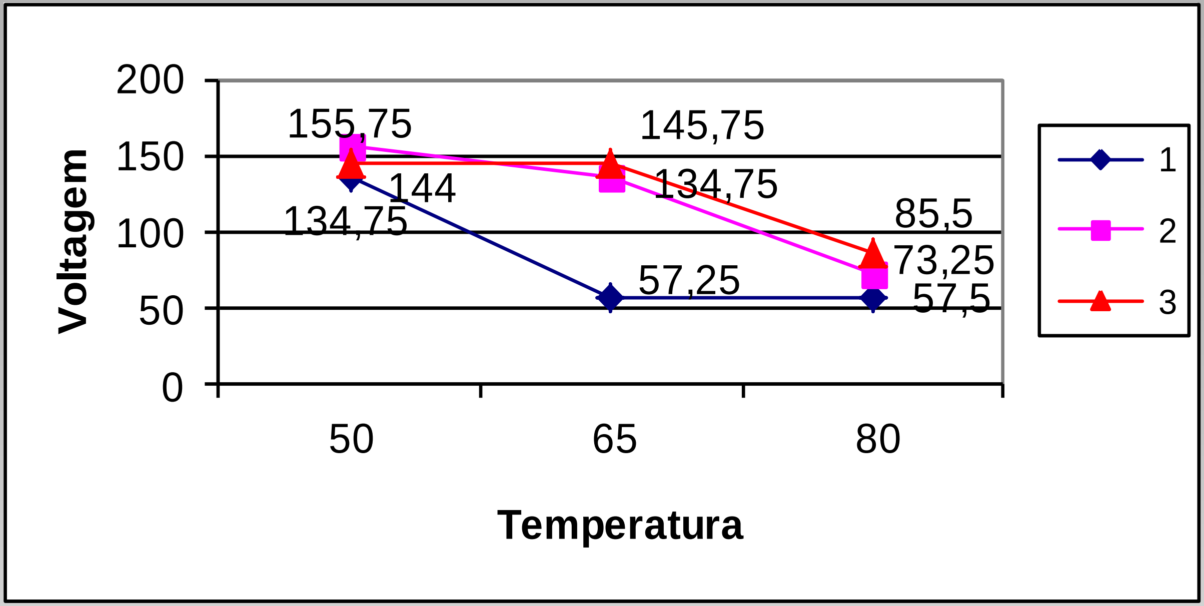
$$F_{tab_{AB}} = F_{0,05;4;27} = 2{,}37$$

Fonte de variação	Soma dos quadrados	GL	Médias quadradas	F calculado	F tabelado
Material (A)	12888	2	6444	9,3	3,35
Temperatura (B)	31892	2	15946	23,1	3,35
AB	8187	4	2047	3,0	2,73
Erro	18644	27	691		
Total	71611	35			

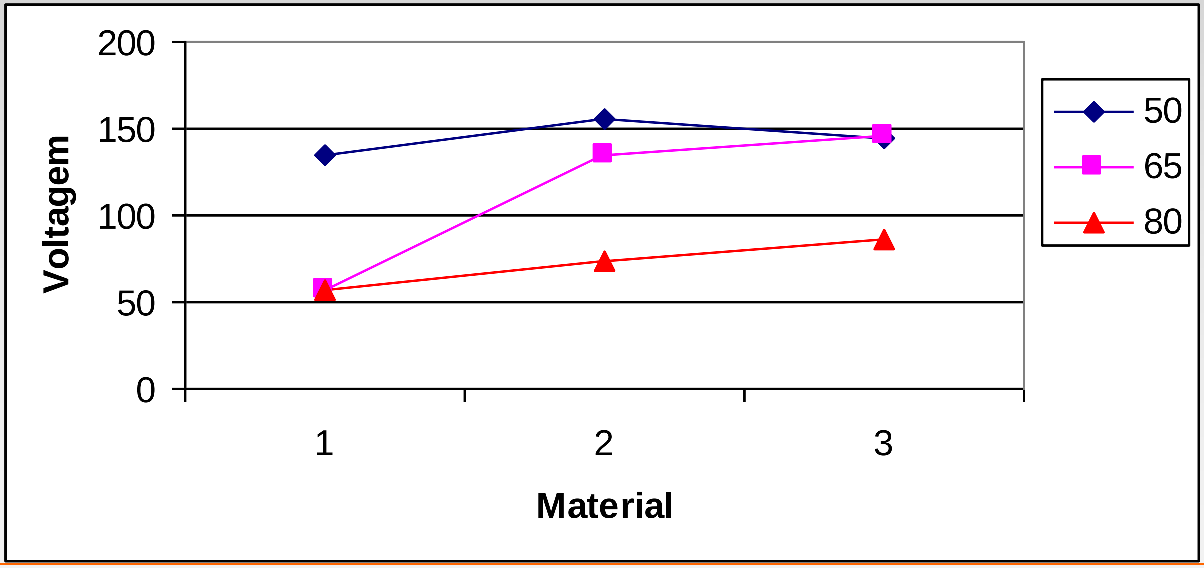
O efeito do Material é significativo Fcalc=9,3> Ftab=3,35 ;

O efeito da Temperatura é significativo Fcalc=23,1> Ftab=3,35 ;

O efeito da interação é significativo Fcalc=3,0> Ftab=2,37



200
150
100
50
0
Voltagem
155,75
145,75
144
134,75
134,75
85,5
73,25
57,25
57,5
50
65
80
Temperatura
1
2
3



200
150
100
50
0
Voltagem
1
2
3
Material
50
65
80

LOPP

Comparação múltipla de médias (CMM)

Se há efeitos significativos, procede-se uma CMM.

- **Se apenas os efeitos principais são significativos (ou seja, a interação não é significativa)**
  - **CMM para cada fator individualmente**
  - **Usar gráfico de barras ou linhas**
- **O desvio-padrão das médias é calculado como:**
  - **O Valor esperado da MQR é igual a variância: E(MQR) = σ^2**
  - **Como o desvio padrão das médias é** $\sigma_{\bar{y}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - **Logo, usa-se** $S_{Y_{i..}} = \sqrt{\frac{MQR}{bn}}$ $\quad S_{Y_{.j.}} = \sqrt{\frac{MQR}{an}}$

LOPP

Comparação múltipla de médias (CMM)

- **Se a interação é significativa (independentemente se os efeitos principais são ou não significativos)**
  - **CMM somente para a interação**
  - **As comparações devem ser feitas fixando-se um nível de um dos fatores e comparando as médias dos níveis do outro fator.**
  - **Usar gráfico de linhas**
- **O desvio-padrão das médias é calculado como:**
  - **O Valor esperado da MQR é igual a variância: E(MQR) = σ^2**
  - **Como o desvio padrão das médias é** $\sigma_{\bar{y}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - **Logo usa-se** $S_{Y_{ij.}} = \sqrt{\dfrac{MQR}{n}}$

Comparação múltipla de médias (CMM)

– **Como o valor nominal = 127 V, sugere-se temperatura 65ºC e investigar se há DS entre as médias obtidas com os três tipos de materiais**

– **Fator fixo: Temperatura**

Nível fixo do fator: 65ºC

Análise das médias do fator Material

(i) Médias em ordem crescente:

$\bar{y}_{12}$ **= 57,25 (material 1)**

$\bar{y}_{22}$ **= 134,75 (material 2)**

$\bar{y}_{32}$ **= 145,75 (material 3)**

LOPP

Comparação múltipla de médias (CMM)

(ii) Desvio padrão das médias:

- **O Valor esperado da MQR é igual a variância: E(MQR) = σ^2**
- **Como o desvio padrão das médias é** $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Teorema do limite central

- **Então o desvio padrão das médias do efeito da interação pode ser descrito como:**

$$S_{Y_{AB.}} = \frac{\sqrt{MQR}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{691}}{\sqrt{4}} = \frac{26{,}2}{2} = 13{,}1$$

LOPP

Comparação múltipla de médias (CMM)

- (*iii*) Limite de decisão:

$$L_d = 3 \times S_{Y_{AB.}} = 3 \times 13{,}1 = 39{,}3$$

(*iv*) Comparação das médias duas a duas:

$\bar{y}_{32} - \bar{y}_{22}$ = 145,75 - 134,75 = 11,0 < Ld=39,3 DNS

$\bar{y}_{32} - \bar{y}_{12}$ = 145,75 - 57,25 = 88,5 > Ld=39,3 DS

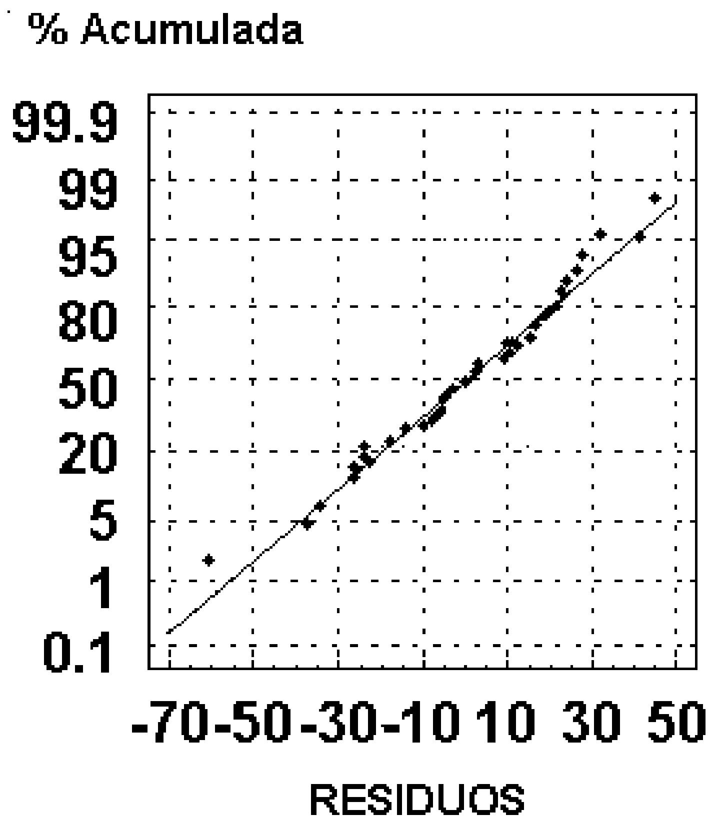
$\bar{y}_{22} - \bar{y}_{12}$ = 134,75 - 57,25 = 77,5 > Ld=39,3 DS

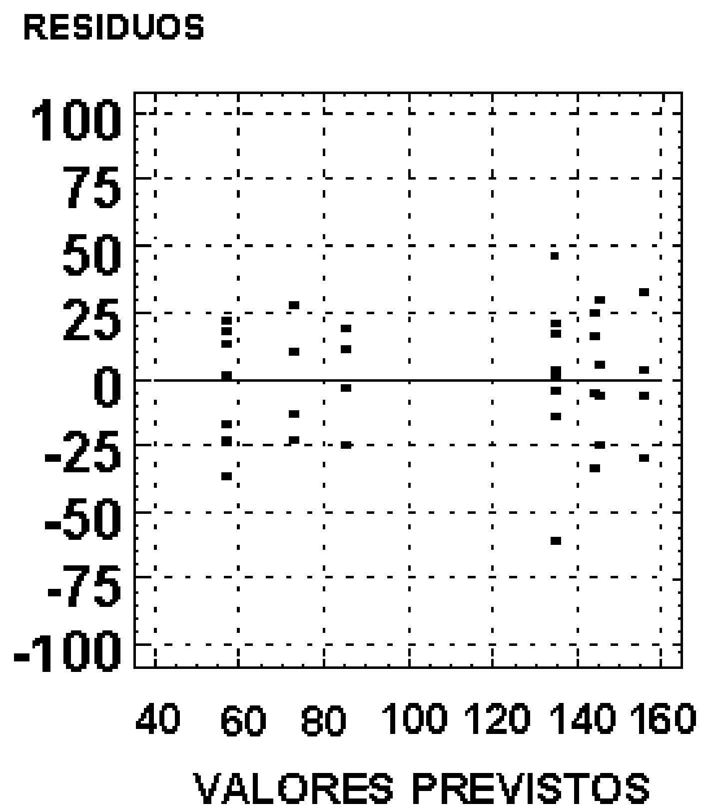
O resultado da otimização indica que deve-se utilizar as placas de material 2 ou 3 para se obter a máxima voltagem.

LOPP

Teste das suposições do modelo:

$$\varepsilon_{ijk} \rightarrow N(0,\sigma)$$





Experimentos sem repetição

– **Lembrando, o número de GDL do termo de erro vem dado por:**

GDL=ab(n-1)

– **Se não há repetições do experimento, isto é, se n = 1, não sobram GDL para calcular de modo independente a MQR.**

$$MQR = \frac{SQR}{ab(n-1)}$$

Indeterminado se o denominador é zero.

$$F_{cal} = \frac{MQG}{MQR}$$

Logo o F_{cal} também vai ser indeterminado

LOPP

Experimentos sem repetição

– **Contudo, se há motivos para acreditar que a interação AB não é significativa, então:**

E(MQAB) = E(MQR)

– **E é possível fazer a análise usando a MQAB como uma estimativa do termo de erro:**

Fonte de variação	Soma dos quadrados	GL	Médias quadradas	Teste F
A	SQA	(a-1)	MQA	MQA / MQAB
B	SQB	(b-1)	MQB	MQB / MQAB
Erro (AB)	SQAB	(a-1)(b-1)	MQAB	
Total	SQT	ab-1		

Exemplo

– **Um pesquisador acredita que a resistência à tração de certos corpos de prova (CP) de argamassa depende da % de microssílica utilizada na sua fabricação e do operador que confecciona os CPs. Os dados revelaram:**

	% de Microssílica					
Operador	0	5	10	15	20	Totais
1	4	5	6	5	3	23
2	1	3	4	3	2	13
3	1	1	3	2	1	8
Totais	6	9	13	10	6	44
Média	2	3	4,3	3,3	2	

LOPP

Exemplo

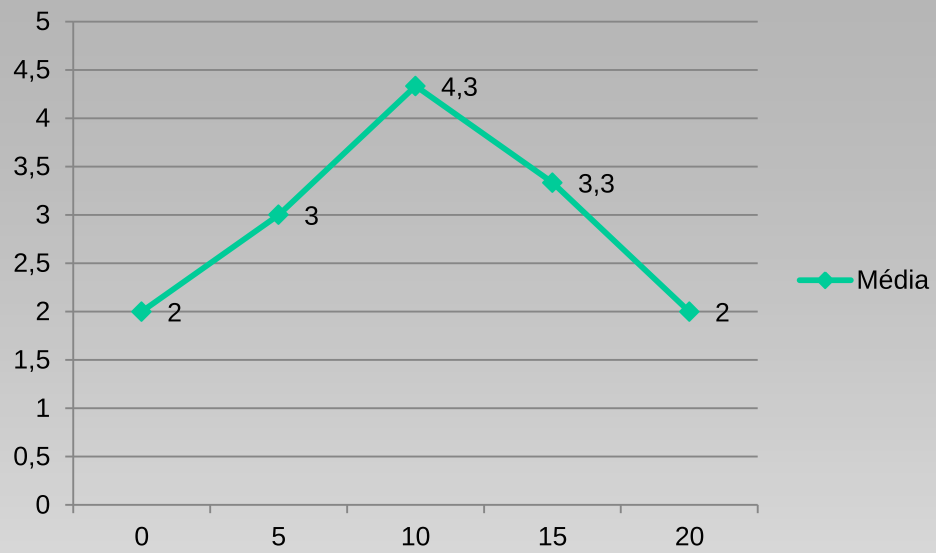
Fonte de variação	Soma dos quadrados	GL	Médias quadradas	F calc	F tab
Operador (A)	23,33	2	11,67	46,7	4,46
% Microssílica (B)	11,60	4	2,90	11,6	3,84
Erro (AB)	2,00	8	0,25		
Total	36,93	14			

Os efeitos do operador e do % de microssílica são significativos

È necessário realizar uma CMM tanto para A quanto para B.

LOPP

Exemplo



$$S_{\bar{Y}_{A.}} = \sqrt{\frac{MQR}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}25}{3}} = 0{,}289$$

$$Ld = 3 \times S_{\bar{Y}_{A.}} = 3 \times 0{,}289 = 0{,}866$$

	Média	Diferença				
0	2	0-5	1	>	Ld	0,866025
5	3	5-10	1,3	>	Ld	0,866025
10	4,3	10-15	1,0	>	Ld	0,866025
15	3,3	15-20	1,3	>	Ld	0,866025
20	2					

Como a resistência é do tipo maior-é-melhor, o melhor % de microssílica é 10%