Série Monográfica Qualidade

Projeto de Experimentos

José Luis Duarte Ribeiro & Carla Schwengber ten Caten
Editores

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção

Porto Alegre, RS

2011

Projeto de Experimentos

José Luis Duarte Ribeiro & Carla Schwengber ten Caten, editores

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção

Projeto Gráfico

Lia Buarque de Macedo Guimarães

Editoração Eletrônica

Andréia Fabiane Nahra Leal
Fabíolla Granata
Marcelo Luiz Pereira

Ilustração da Capa

Arcângelo Ianelli, *Natureza-morta*
1960 óleo s/ tela 70 X 83 cm
IPHAN, Museu Nacional de Belas Artes

Projeto de Experimentos

1. Introdução ao Planejamento de Experimentos

José Luis Duarte Ribeiro
Carla ten Caten

A metodologia conhecida como projeto de experimentos foi introduzida por Fischer em 1935 e inicialmente aplicada a experimentos de agricultura. Posteriormente, essa metodologia difundiu-se rapidamente em campos como Agronomia, Biologia, Engenharia Química, Engenharia Industrial e Engenharia da Qualidade. Atualmente, Projeto de Experimentos tem sido aplicado virtualmente em todas as áreas de conhecimentos.

Trata-se de uma metodologia apoiada fortemente em conceitos estatísticos, destinada a otimizar o planejamento, execução e análise de um experimento. O uso de Projeto de Experimentos permite que se estruture a seqüência de ensaios de forma a traduzir os objetivos preestabelecidos pelo pesquisador. A eficiência de experimentos projetos é superior em termos de informação a qualquer outra seqüência não estruturada de ensaios.

Na verdade, devido às decisões importantes que derivam dos resultados experimentais, e ao custo dos experimentos, não é recomendável buscar a solução de um determinado problema confiando apenas na intuição.

A metodologia de Projeto de Experimentos é utilizada na Otimização de um sistema. Entende-se por sistema, qualquer produto, processo ou serviço. Um sistema é avaliado por indicadores de desempenho, ou seja, características de qualidade resultantes da operação do mesmo. Por exemplo, as características de qualidade avaliadas em um sistema podem ser produtividade, custos, características dimensionais, entre outras.

Em um sistema, existem parâmetros do sistema (do produto, do processo ou do serviço) que podem ser alterados durante sua execução. Por exemplo, em um produto pode-se alterar o tipo de material e suas características dimensionais, em um processo pode-se alterar a temperatura e a pressão e em um serviço pode-se alterar o número de funcionários e o *layout*. A alteração desses parâmetros pode afetar as características de qualidade resultantes do sistema.

Existem ainda os fatores de ruído, ou seja, fatores que podem influenciar o desempenho do sistema, no entanto não consegue-se controlá-los. Os fatores de ruído são, por exemplo, a temperatura e umidade do dia, o desgaste das ferramentas e a habilidade e cansaço do operador.

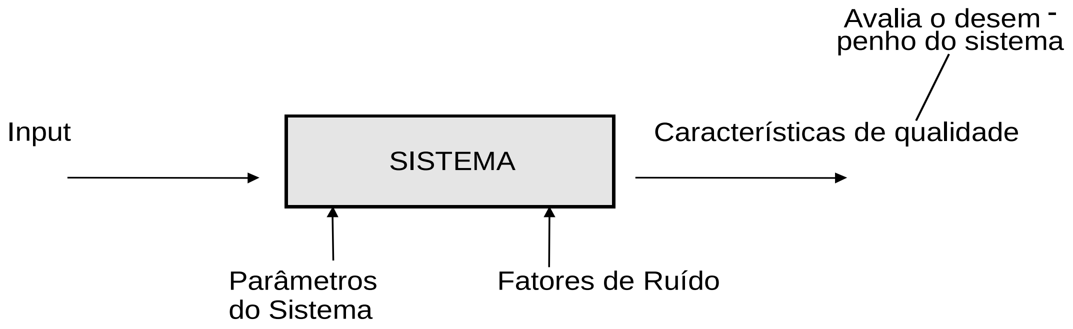


Figura 1. Esquema de um sistema

1.1. OBJETIVO CENTRAL DO PROJETO DE EXPERIMENTOS:

Achar o ajuste ótimo dos parâmetros do sistema de forma a:

- Maximizar o desempenho do sistema
- Minimizar custos
- Tornar o desempenho do sistema pouco sensível ao efeito dos fatores de ruído

Fazer isso, ...

- Definindo uma seqüência de ensaios econômica e eficiente
- Procedendo uma avaliação estatística dos resultados
  = Assegurar respaldo científico
  = Maximizar as informações obtidas

1.2. FASES DO PROJETO DE EXPERIMENTOS

OUVIR A VOZ DO CLIENTE

↓

OUVIR A VOZ DO ESPECIALISTA

↓

PLANEJAMENTO FINAL E EXECUÇÃO

↓

ANÁLISE

↓

OTIMIZAÇÃO

1.2.1. Trabalho de Equipe:

O trabalho em equipe exige:

- Conhecimentos Mercadológicos
- Conhecimentos Técnicos
- Conhecimentos Estatísticos

O que será visto:

- Introdução ao Projeto de Experimentos
- Comparação de vários grupos
- Projetos fatoriais com dois fatores
- Generalização dos projetos fatoriais
- Blocos Aleatorizados e Quadrado Latino
- Projetos fatoriais do tipo 2k
- Experimentos fatoriais confundidos em bloco
- Experimentos fatoriais fracionados
- Metodologia de Superfície Resposta

1.2.2. Terminologia

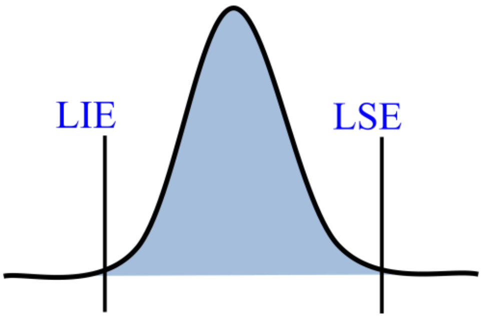
Características de Qualidade

- Todas as características do produto que o cliente percebe como importantes.

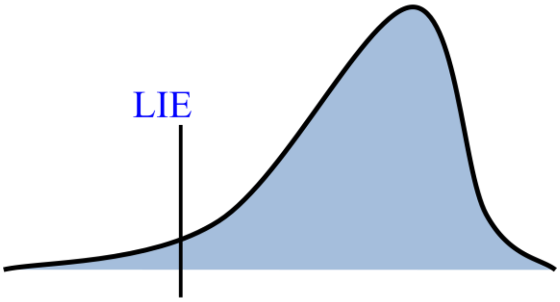
Variáveis de resposta

- Aspectos do produto que podem ser medidos e que permitem quantificar as características de qualidade.

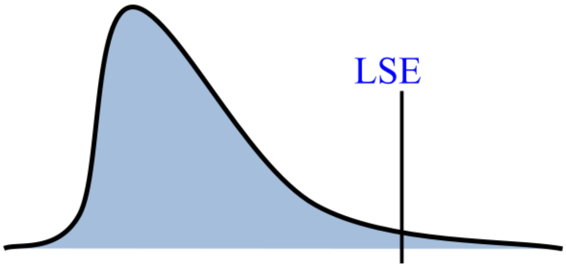
Características de qualidade do tipo nominal-é-melhor (por exemplo, características dimensionais) tendem a apresentar uma distribuição de probabilidade aproximadamente simétrica, pois as causas de variabilidade geram valores que podem se afastar tanto para cima como para baixo do alvo. Elas apresentam tolerâncias bilaterais.



Características de qualidade do tipo maior-é-melhor (por exemplo, resistência mecânica) tendem a apresentar uma distribuição de probabilidade assimétrica à esquerda, pois muitas vezes existem limitações tecnológicas que dificultam a obtenção de valores altos, enquanto que muitos causas de variabilidade podem gerar valores baixos. Elas apresentam apenas Limite inferior de especificação-LIE.



Características de qualidade do tipo menor-é-melhor (por exemplo, nível de ruído) tendem a apresentar uma distribuição de probabilidade assimétrica à direita, pois muitas vezes existem limitações tecnológicas dificultando a obtenção de valores baixos, enquanto que muitos causas de variabilidade podem gerar valores altos. Elas apresentam apenas Limite superior de especificação-LSE.



Parâmetros do processo

- Todas as variáveis da linha de produção que podem ser alteradas e que talvez tenham um efeito sobre as variáveis de resposta.

Fatores controláveis

- São um subconjunto dos parâmetros do processo; são aqueles parâmetros do processo que foram elegidos para serem estudados a vários níveis no experimento.

Fatores constantes

- São os parâmetros do processo que não entram no experimento e que são mantidos constantes durante o experimento.

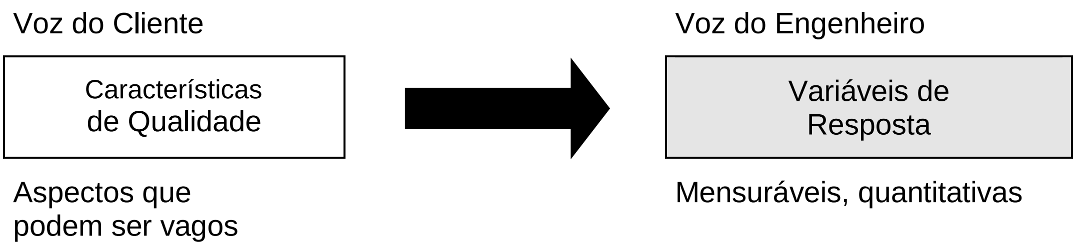
Fatores não controláveis (Ruído)

- São as variáveis que não podem ser controladas pela equipe técnica. São responsáveis pelo erro experimental ou variabilidade residual ou variância do erro.

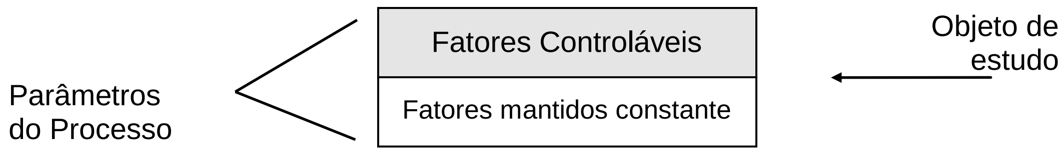
Importante

- Se um fator (variável importante) não for considerado como um fator controlável (investigado a vários níveis) ou como um fator constante (fixo em um nível), ele irá se tornar um fator de ruído e inflacionar a variabilidade do erro tornando o experimento pouco sensível para a identificação de fatores significativos

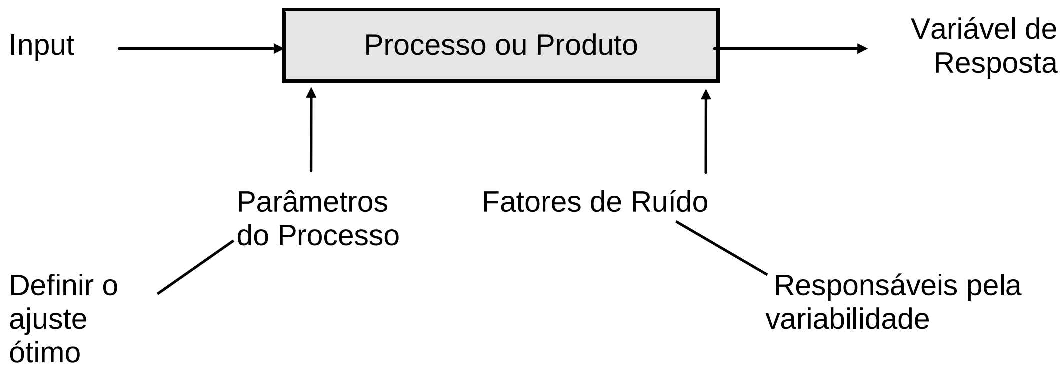
1.2.3. Relação entre a demanda de qualidade (cliente) e as variáveis de resposta (engenharia)



1.2.4. Status dos parâmetros do processo dentro de um programa experimental:



1.2.5. Relação entre os fatores controláveis e a resposta



1.3. AS ETAPAS DE UM EXPERIMENTO

1.3.1. Ouvir a voz do cliente (*o quê*)

- Pesquisa de Mercado
- Identificar as C.Q. de interesse
- Identificar a importância relativa dessas C.Q.

1.3.2. Ouvir a voz do engenheiro (*como*)

- Definir variáveis de resposta associadas às C.Q.
- Identificar outras variáveis de resposta de interesse
  (em geral associadas a custos/produtividade)
- Identificar os parâmetros do processo
- Identificar o intervalo de variação dos P.P.
- Identificar os fatores controláveis
  (F.C. = P.P. que podem afetar as V.R.)
- Definir o número de níveis para cada F.C.
- Definir possíveis interações entre os FC
- Identificar as restrições experimentais
  - Numero máximo de ensaios
  - Equipamento e RH disponíveis
  - Tempo disponível, etc.
- Escolher o modelo estatístico do experimento

1.3.3. Planejamento final e execução

- Escrever a matriz experimental
- Definir a ordem dos ensaios (aleatorização)
- Definir os procedimentos de ensaio (uniformização)
- Desenhar planilhas de coleta de dados
- Executar o experimento e anotar resultados

1.3.4. Análise

- Fazer a análise de variância
- Escrever uma tabela de médias
- Fazer gráficos dos efeitos dos fatores principais
- Fazer gráficos das interações significativas

1.3.5. Otimização

- Modelar individualmente cada Variável de Resposta
  V.R. = f (F.C.)
- Definir uma função objetivo:
  L = f1 (V.R.) → L = f2 (F.C.)
- Otimizar, isto é, achar o ajuste dos F.C. que minimiza/ maximiza L.
- Verificar a consistência da solução

1.3.5.1. Exemplo: Estudo experimental em solados de borracha.

1. Ouvir a voz do cliente

- Pesquisa de Mercado
  O solado deve ser macio e durável.

- Características de Qualidade:

Designação	Tipo	Importância Relativa
Flexibilidade	Maior-é-melhor	1
Durabilidade	Maior-é-melhor	1

2. Ouvir a voz do Engenheiro

- Variáveis de Resposta:

Designação	Tipo	Importância Relativa	Alvo
Módulo de Elasticidade (kgf/cm2)	Menor-é-melhor	1	200
Dureza superficial (kgf)	Maior-é-melhor	1	25
Resistência à tração (Kgf/cm2)	Maior-é-melhor	0.5	100

- Parâmetros do processo:

Designação	Intervalo de Variação	Unidade
Quantidade de Talco	2 a 5	g
Quantidade de óleo	0.5 a 1	ml
Quantidade de Asfalto	0.5 a 1	g
Quantidade de Breu	2 a 4	u.v.
Quantidade de Fluxtec	10 a 20	u.v.
Tempo de mistura	30 a 60	min
Temperatura de mistura	60 a 80	^{o}C
Tempo de resfriamento	30 a 120	min

- Fatores Controláveis:
  - Quantidade de Breu
  - Quantidade de Fluxtec
  - Tempo de mistura
  - Temperatura de mistura
- Definição dos níveis dos fatores controláveis:

Fator	No. níveis	Níveis	Unidade
Quantidade de Breu	2	2 4	u.v.
Quantidade de Fluxtec	4	10 13 16 19	u.v.
Tempo de mistura	3	30 45 60	Min
Temperatura de mistura	3	60 70 80	^oC

- Listar possíveis interações entre os fatores controláveis:
  - Temperatura de mistura x Tempo de mistura
  - Temperatura de mistura x Quantidade de Fluxtec
- Listar restrições experimentais
  - Máximo 100 ensaios em função de tempo e $
  - Máximo 20 ensaios por dia
- Definir o modelo estatístico

  - Um Projeto Fatorial Cruzado completo: 2 x 4 x 3 x 3 = 72 ensaios

3. Planejamento final e execução

- Matriz experimental e ordem dos ensaios

Rodada	Ordem	Fator A	Fator B	Fator C	Fator D	Fator E	Fator F
1	54	1	1	1	1		
2	23	1	1	1	2		
3	18	1	1	1	3		
4	9	1	1	2	1		
:	:	:	:	:	:		
:	:	:	:	:	:		
72	17	2	4	3	3		

- Procedimentos de ensaio
  - Aleatorizar a ordem dos ensaios
  - Fixar parâmetros do processo não incorporados no experimento
  - Observar sempre a mesma sistemática de ensaios, mesmas máquinas, operadores, etc.

- Planilha de coleta de dados:

Ensaio:____

Data :_______________________ Operador: ________________

1.3.5.2. Ensaio	Fatores Controláveis				Variáveis de Resposta		
	Breu	Fluxtec	Tempo Mistura	Tempe-ratura	Módulo de Elast.	Dureza Superf.	Resist. à Tração
1	2	10	45	60			
2	4	10	60	60			
3	4	16	60	80			
4	2	13	30	70			
:	:	:	:	:			
:	:	:	:	:			
72	4	13	45	70			

Obs:
____
____
____
____

- Execução do experimento

4. Análise

Será o objetivo principal do curso

5. Otimização

Esse assunto será abordado freqüentemente

1.4. EXERCÍCIO 1:

Escolher um aspecto da sua área de conhecimento que demandaria pesquisa experimental e completar todas as fases do planejamento de um experimento seguindo o roteiro apresentado abaixo.

TÍTULO DO ESTUDO

Objetivos do Estudo

Equipe de Trabalho

A voz do cliente:

Listar a demanda de qualidade do cliente

Demanda de Qualidade	Importância

A voz da equipe técnica:

Listar as variáveis de resposta que avaliam quantitativamente a demanda de qualidade.

Variáveis de Resposta	Tipo	Alvo (unidades)	Especificações Min	Especificações Max	Importância
Y1:					
Y2:					
Y3:					
Y4:					
Y5:					

Listar todos os parâmetros do processo

Parâmetro do processo	Ajuste atual	Ajuste Sugerido	Intervalo de pesquisa		Facilid. de ajuste
X1:					
X2:					
X3:					
X4:					
X5:					
X6:					
X7:					
X8:					
X9:					
X10:					

Listar os fatores de ruído

Fatores de ruído
Z1:
Z2:
Z3:
Z4:
Z5:

Atribuir uma intensidade para as relações entre parâmetros do processo e variáveis de resposta

Intensidade das relações e interações	Valor numérico
Inexistente	0
Fraca	1
Moderada	3
Forte	9

		Rij = Relações XiYj										
	IE	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X6**	**X8**	**X9**	**X10**	
Y1												
Y2												
Y3												
Y4												
Y5												
Y6												
	PRj											

O formulário para os cálculos é o seguinte:

$$PR_j = \sum_i R_{ij} \times IE_i$$

onde: R_{ij} relação entre a variável de resposta i e o parâmetro do processo j

IE_i índice de importância para a variável de resposta i

Listar os fatores controláveis (subconjunto dos parâmetros do processo que foram priorizados)

Fatores controláveis	PRj	Num níveis	Níveis reais

Listar os fatores mantidos constantes e seu respectivos ajustes.

Fatores mantidos constantes	PRj	Ajuste

Listar possíveis interações entre os fatores controláveis:

-
-

Listar restrições experimentais

--
-
-

Planejamento final e execução

Matriz experimental e ordem dos ensaios

Rodada	Ordem	Fator A	Fator B	Fator C	Fator D	Fator E	Fator F

Procedimentos de ensaio

-
--

Planilha de coleta de dados

Ensaio: ____

Data : ________________________ Operador : __________________

Ensaio	Fatores Controláveis				Variáveis de Resposta		

Obs: ____

____

____

____

____

Obs: ____

2. Comparação de Vários Grupos (One-way Analysis of Variance)

José Luis Duarte Ribeiro
Carla ten Caten

2.1.1. Experimentos que envolvem:

- 1 Variável de Resposta
- 1 Fator Controlável a vários níveis

2.1.2. Objetivo:

Identificar se os valores da variável de resposta medidos nos diversos níveis diferem entre si.

2.1.3. Existem 2 tipos de experimentos:

- Fatores Controláveis a níveis fixos – *É possivel repetir o ensaio tempos depois, basta utilizar os niveis dos FC escolhidos.*

  (Por ex., 5 valores de temperatura)
- Fatores Controláveis a níveis aleatórios - *Nunca mais será possível ter os mesmos fatores controláveis.*

  (Por ex., 3 lotes escolhidos ao acaso)

2.1.4. Disposição dos dados:

Os dados são dispostos da seguinte forma:

Fator A	A1	A2	...	Ak	
	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}	
	y_{21}	y_{22}	...	y_{2k}	
	:	:	y_{ij}	:	
	:	:	...	:	
	$y_{n1,1}$	$y_{n2,2}$	...	$y_{nk,k}$	
Totais $T_{.j}$	$T_{.1}$	$T_{.2}$	...	$T_{.k}$	$T_{..} =$
No.Obs. n_j	n_1	n_2	...	n_k	$N =$
Médias $\overline{Y}_{.j}$	$\overline{Y}_{.1}$	$\overline{Y}_{.2}$	...	$\overline{Y}_{.k}$	$\overline{\overline{Y}}_{..} =$

2.1.5. Exemplo a níveis fixos:

Um profissional deseja estudar se a temperatura ambiente influencia na produtividade dos funcionários. Para isso realizou três medidas de produtividade (peças/hora) em três temperaturas diferentes.

Temperatura		
15°C	25°C	35°C
12	20	17
13	19	16
11	18	18

Fator controlável

Níveis de fator controlável

Repetições

Medição da variavel de resposta

Variável de resposta: produtividade

Repetições: 3 valores para cada nível

2.2. A ANÁLISE DE VARIÂNCIA (ANOVA)

- A análise de variância é a metodologia estatística que avalia a significância dos diversos fatores e interações.
- Há suposições básicas para validar a análise de variância:
  - Distribuição normal dos dados.
  - Homogeneidade das variâncias (em cada grupo) - aleatoriedade dos erros.
  - Aditividade dos efeitos.
  - Independência estatística dos valores observados (sem correlação).
- Se as suposições de normalidade e homogeneidade não forem satisfeitas, o resultado da análise de variância deixa de ser exato, e passa a ser aproximado.
- Em raras situações a suposição de aditividade dos efeitos não é satisfeita. Nesse caso, uma transformação dos dados (log, √, etc.) pode recuperar a aditividade e permitir uma análise mais precisa.

- A independência estatística dos valores observados é obtida com o uso da aleatorização.

2.2.1. Formulação matemática do problema:

Modelo Estatístico: $Y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij}$

onde: μ é a média geral;
τ_j é o efeito do grupo j;
ε_{ij} é um erro aleatório.

2.2.2. Hipóteses:

H0: não há diferenças significativas entre os grupos;

H1: há diferenças significativas entre os grupos provocada pelo fatro controlável investigado

Para o exemplo anterior,

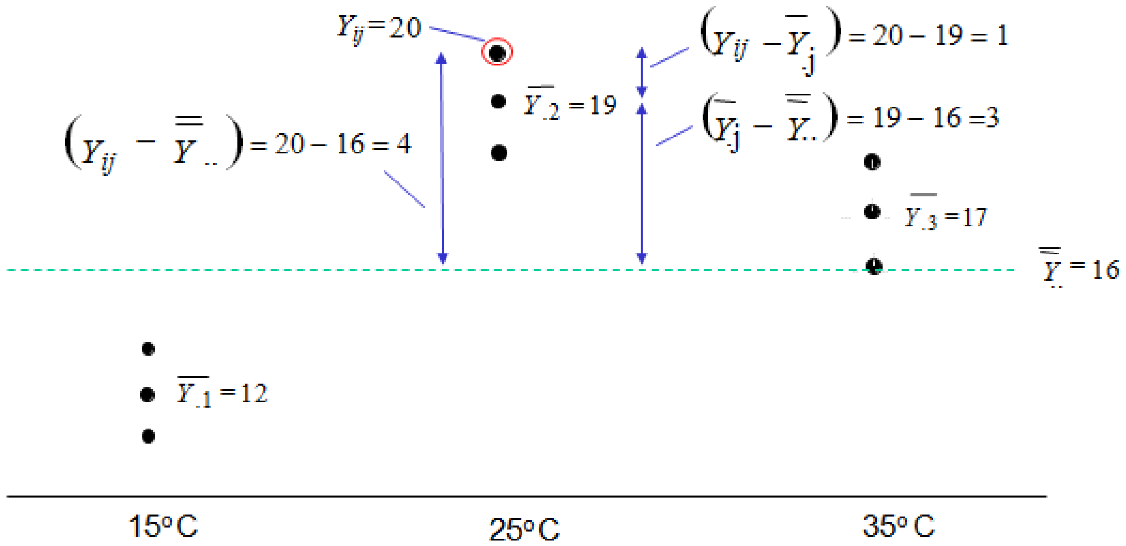
	Temperatura			
	15 ºC	**25 ºC**	**35 ºC**	
	12	20	17	
	13	19	16	
	11	18	18	
$T_{.j} =$	36	57	51	$T_{..} = 144$
$n_j =$	3	3	3	$N = 9$
$\overline{Y}_{.j} =$	12	19	17	$\overline{\overline{Y}}_{..} = 16$

Modelo Estatístico

$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{\varepsilon_{ij}}$

$20 = 16 + 3 + 1$

Os dados podem ser visualizados no gráfico abaixo:



Decomposição dos resíduos:

$$\left(Y_{ij} - \overline{\overline{Y}}_{..}\right) = \left(\overline{Y}_{.j} - \overline{\overline{Y}}_{..}\right) + \left(Y_{ij} - \overline{Y}_{.j}\right)$$

Elevando ao quadrado e somando:

$$\sum\left(Y_{ij} - \overline{\overline{Y}}_{..}\right)^2 = \sum n\left(\overline{Y}_{.j} - \overline{\overline{Y}}_{..}\right)^2 + \sum(Y_{ij} - \overline{Y}_{.j})^2$$

$$SQT \quad = \quad SQG \quad + \quad SQR$$

Graus de Liberdade:

$$(N - 1) \quad = \quad (K - 1) \quad + \quad (N - K)$$

Médias quadradas ou :

$$MQG = SQG \, / \, (K - 1)$$

$$MQR = SQR \, / \, (N - K)$$

Se não há diferenças significativas entre os grupos

$$E\,[MQG] = E\,[MQR]$$

O teste F compara as duas variâncias:

$$F_{calc} = \frac{Variância \;\; entre \; grupos}{Variância \;\; dentro \; do \; grupo} = \frac{MQG}{MQR}$$

Comparar **F calculado** com **F tabelado**, se o valor calculado for maior que o valor tabelado (ou valor-p <0,05), descarta-se Ho, ou seja, existe diferenças significativas entre os grupos provocada pelo fator controlável em estudo.

O limite de decisão é estabelecido usando os valores tabelados da distribuição F, ou seja:

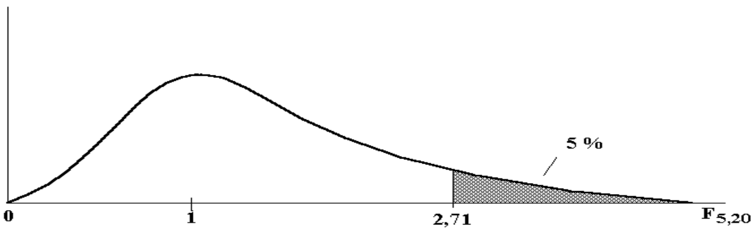
$$F_{\alpha,k-1,N-k}$$

onde:

α: nível de significância (usualmente 0,05)
k-1: graus de liberdade do numerador (MQG)
N-k : graus de liberdade do denominador (MQR)

Sendo **α** o nível de significância (geralmente **α** =0,05 ou 5%), que é um valor aceitável de se cometer o erro do tipo I (rejeitar H_0 sendo que a hipótese é verdadeira). O intervalo de confiança na decisão é (1- **α)**

Exemplo da Distribuição F $_{0,05,5,20}$



Distribuição F de Snedecor

Estatística descritiva

Sumário

Groups	*Count*	*Sum*	*Average*	*Variance*
15°C	3	36	12	1
25°C	3	57	19	1
35°C	3	51	17	1

ANOVA

Fonte	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-value*	*F crit*
Entre grupos	78	2	39	39	0,000364	5,143253
Dentro grupo	6	6	1			
Total	84	8				

Fórmulas para os cálculos:

$TC = T_{..}^2/N$ → Termo de correção

$SQT = \sum\left(Y_{ij}{}^2\right) - TC$

$$SQG = \sum(T_{.j}{}^2/n_j) - TC$$

$$SQR = SQT - SQG$$

2.2.3. Tabela ANOVA:

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F
Entre Grupos	SQG	K - 1	MQG	F = MQG / MQR
Dentro Grupos	SQR	N - K	MQR	
Total	SQT	N - 1		

2.2.4. Exemplo a níveis fixos:

Um pesquisador deseja investigar o efeito da temperatura do forno sobre o número de bactérias contadas após o processo de esterelização. Os dados revelaram o seguinte:

Hipóteses:

- Ho: não há diferenças significativas entre os grupos, ou seja, não há efeito da temperatura do forno;
- H1: há diferenças significativas entre os grupos provocada pela temperatura do forno.

Temperatura	70	80	90	100	110	
	15,0	13,1	12,4	10,4	13,1	
	15,9	14,1	11,2	13,4	10,0	
	18,4	18,2	15,9	11,5	13,9	
	17,2	11,1	13,4	14,2	11,1	
	18,6	15,5	9,00	12,7	13,6	
	18,7	12,2	10,3	13,8	12,4	
	16,0	12,3	10,0	12,6	11,2	
	17,1	13,0	13,2	11,4	12,3	
	21,5	15,5	11,0	16,1	13,4	
	14,2	14,3	13,8	13,7	15,9	
	18,4	15,9	12,4	9,20	9,10	
	15,1	15,6	13,4	10,6	10,2	
Totais	206,10	170,80	146,00	149,60	146,20	T..=818,7
No.Obs.	12	12	12	12	12	N = 60
Médias	17,18	14,23	12,17	12,47	12,18	$\bar{\bar{Y}}_{..}$ = 13,65

2.2.5. Cálculos iniciais:

$$TC = T_{..}{}^2/N = (818{,}7)^2/60 = 11.171{,}1$$

$SQT = \sum(Y_{ij}^2) - TC = 11.608.2 - 11.171,1 = 437,1$

$SQG = \sum\left(\frac{T.j^2}{n_j}\right) - TC = \left[\frac{(206,1)^2}{12}\right] + \cdots + \left[\frac{(146)^2}{12}\right] - 11.171,1 = 222,3$

$SQR = SQT - SQG = 437,1 - 222,3 = 214,8$

2.2.6. Tabela Anova:

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F	Ftab
Entre Grupos (Temperatura)	222,3	4	55,6	14,2	2,55
Dentro Grupos (Residual)	214,8	55	3,9		
Total	437,1	59			

F calculado	>	F tabelado
14,2	>	2,55

➔ Há diferenças significativas entre os grupos, provocada pelo fator controlável temperatura do forno.

Comparação múltipla de médias

1. Calcular o desvio padrão das médias

$\overline{S_y} = \sqrt{MQR}/\sqrt{n_c} = \frac{\sqrt{3,9}}{\sqrt{12}} = \frac{1,97}{3,46} = 0,57$

onde $n_c = (n_1 + n_2 + \ldots + n_k) / k$

2. Calcular o limite de decisão

$L_d = 3\,x\,S_{\bar{y}} = 3\,x\,0,57 = 1,71$

3. Escrever as médias em ordem crescente ou decrescente e compará-las duas a duas. A diferença será significativa se for maior que o L_d

$\overline{Y}_{70} = 17,18 \quad \overline{Y}_{80} = 14,23 \quad \overline{Y}_{90} = 12,17 \quad \overline{Y}_{100} = 12,47 \quad \overline{Y}_{110} = 12,18$

$\overline{Y}_{70}(17,18) - \overline{Y}_{80}(14,23) = 2,95 > Ld = 1,71$ *Dif Signif.*

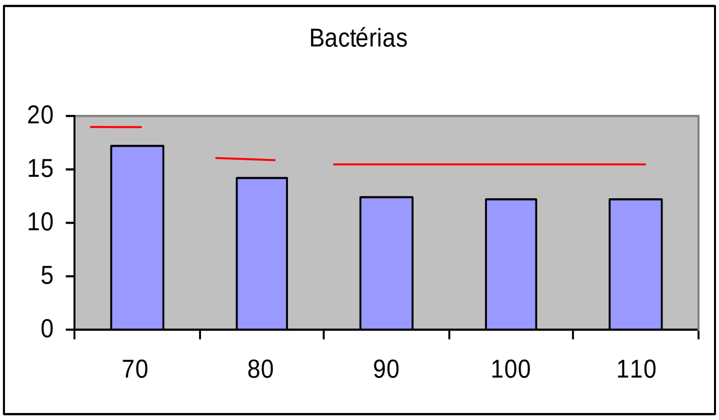
$\overline{Y}_{80}(14,23) - \overline{Y}_{90}(12,17) = 2,06 > Ld = 1,71$ *Dif Signif.*

$\overline{Y}_{90}(12,17) - \overline{Y}_{100}(12,47) = 0,3 < Ld = 1,71$ *Dif Não Signif.*

$\overline{Y}_{100}(12,47) - \overline{Y}_{110}(12,18) = 0,29 < Ld = 1,71$ *Dif Não Signif.*

4. Usar barras contínuas sobre as médias que não diferem entre si

$\overline{\overline{Y}_{70} = 17,18} \; \overline{\overline{Y}_{80} = 14,23} \; \overline{\overline{Y}_{90} = 12,17 \quad \overline{Y}_{100} = 12,47 \quad \overline{Y}_{110} = 12,18}$



O ajuste ótimo considerando qualidade (bactérias) é temperatura 90, 100 ou 110.

O ajuste ótimo considerando qualidade (bactérias) e custo é temperatura 90 (mais barato).

2.2.7. Exemplo a níveis aleatórios:

Um pesquisador deseja investigar se a permeabilidade das lentes de uso flexível fabricadas em sua indústria permanece uniforme ou não. Escolhe-se aleatoriamente três lotes de produção e realizam-se ensaios:

Lote	L1	L2	L3	
	61	60	60	
	62	61	63	
	64	58	59	
	62	58	64	
	63	60	62	
	63	59		
		60		
Totais $T_{.j}$	**375,0**	**416,0**	**308**	**T.. = 1099**
Num. Obs. n_j	**6**	**7**	**5**	**N = 18**
Médias $Y_{.j}$	**62,50**	**59,43**	**61,60**	$\overline{\overline{Y}}_{..}$ **= 61,06**

2.2.8. Cálculos iniciais:

$$TC = T_{..}^2 / N = (1099)^2 / 18 = 67.100,06$$

$$SQT = \Sigma\,(Y_{ij}^2) - TC = 67.163,00 - 67.100,06 = 62,94$$

$$SQG = \Sigma\,(T_{.j}^2 / n_j) - TC = [\,(375)^2 / 6\,] + \ldots + [\,(308)^2 / 5\,] - 67.100,06 = 32,53$$

$$SQR = SQT - SQG = 62,94 - 32,53 = 30,41$$

2.2.9. Tabela Anova:

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F

Entre Grupos (Lotes)	32,53	2	16,26	8,02
Dentro Grupos (Residual)	30,41	15	2,03	
Total	62,94	17		

F calculado	>	F tabelado
8,02	>	3,68

➔ Há diferenças significativas entre os grupos, provocada pelo fator controlável em estudo

Próximo passo: Estimar componentes de variação

$$E\,[MQR] = \sigma^2$$

$$E\,[MQG] = \sigma^2 + n_c\,\sigma_\alpha^{\ 2}$$

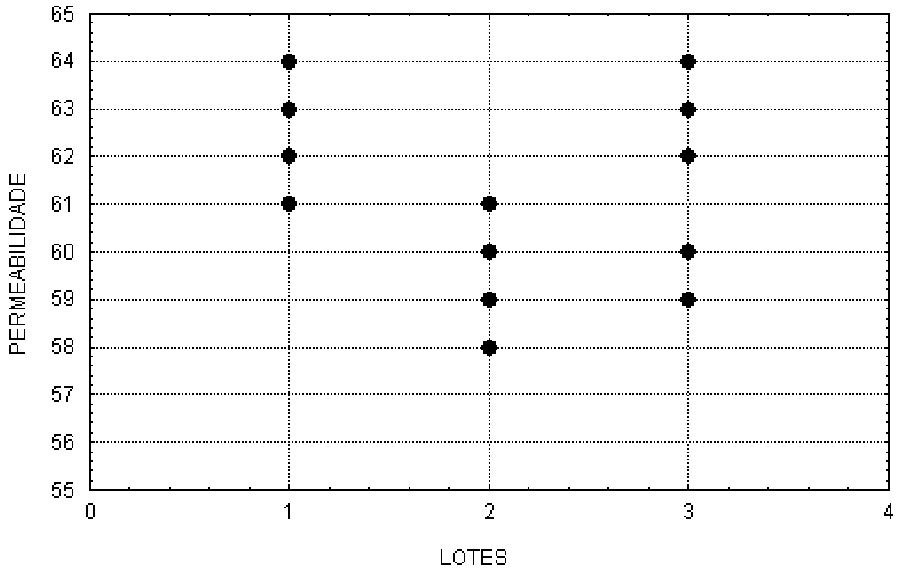
Assim as estimativas são:

$$\sigma^2 = MQR = 2{,}03$$

$$\sigma_\alpha^2 = (MQG - MQR)/n_c = 2{,}37$$

$$\sigma_T^2 = \sigma^2 + \sigma_\alpha^2 = 4{,}40$$

De forma que 2,37 / 4,40 = 54% da variabilidade total observada nos valores de permeabilidade das lentes deve-se a diferenças "entre lotes" e 2,03/4,40=46% deve-se a diferenças “dentro do lote”.



2.3. EXERCÍCIOS:

2.1. Um engenheiro deseja investigar o efeito da concentração de catalisador sobre o tempo de processo de uma mistura química. Para isso investigou quatro diferentes concentrações e mediu o tempo de processo da mistura. Os seguintes tempos de processo foram obtidas nas quatro concentrações:

Catalisadores

	1%	2%	3%	4%	
	56,7	56,3	53,0	54,4	
	58,2	55,9	51,2	53,0	
	57,2	54,5	54,2	51,4	
	58,4	57,0	53,2	51,5	
	55,8	55,3		53,3	
	54,9				
Totais					T.. =
N					N =
Médias					$\overline{\overline{Y}}_{..}$ =

Pede-se:

- Fazer a análise de Variância e concluir a respeito do efeito dos catalisadores.
- Fazer uma comparação múltipla de médias se for o caso.
- Fazer um gráfico de barras, indicando a concentração média obtida para cada catalisador e concluir a respeito do que deve ser feito para (i) assegurar qualidade (menor tempo de processo) e (ii) assegurar economia.

Cálculos iniciais:

$TC = T..^2 / N =$

$\Sigma (Y_{ij}^2) =$

$SQT = \Sigma (Y_{ij}^2) - TC =$

$SQG = \Sigma (T._j^2 / n_j) - TC =$

$SQR = SQT - SQG =$

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F
Entre Grupos (Catalisadores)				
Dentro Grupos (Residual)				
Total				

F calculado =

F tabelado =

Efeito dos catalisadores é significativo ?

Comparação múltipla de médias

(1) Calcular o desvio padrão das médias

$$\overline{S_y} = \sqrt{MQR} / \sqrt{n_c} =$$

onde $n_c = (n_1 + n_2 + \ldots + n_k) / k$

(2) Calcular o limite de decisão

$$L_d = 3 \, x \, S_{\bar{y}} =$$

(3) Escrever as médias em ordem crescente ou decrescente e compará-las duas a duas. A diferença será significativa se for maior que o L_d

$Y_{(1)} - Y_{(2)} =$

$Y_{(1)} - Y_{(3)} =$

$Y_{(1)} - Y_{(4)} =$

$Y_{(2)} - Y_{(3)} =$

$Y_{(2)} - Y_{(4)} =$

$Y_{(3)} – Y_{4)} =$

(4) Usar barras contínuas sobre as médias que não diferem entre si

2.2 Resultados de corpos de prova de concreto com adição de Microssílica indicaram os seguintes resultados de resistência à compressão:

Adição	Resistência (MPa)				
0%	28,1	26,5	24,3	23,8	28,5
5%	35,3	34,3	37,5	38,0	33,9
10%	39,8	44,1	42,3	39,2	44,8
15%	39,1	40,8	43,0	40,1	43,5

a) Indique se esse é um experimento a níveis fixos ou aleatórios.

b) Faça a análise da variância e conclua a respeito do efeito da adição de microssílica.

c) Se for o caso, faça uma comparação múltipla de médias.

d) Plote um gráfico de linha para a mediana.

2.3 Um engenheiro deseja que os azulejos produzidos em uma indústria cerâmica apresentem a menor absorção de água possível. Os resultados de um experimento feito com três tipos diferentes de argila indicaram o seguinte:

Tipo de Argila	Absorção (gramas)						
A1	141	112	128	122	102		
A2	132	115	98	121	108	139	126
A3	135	122	158	143	155		

a) Indique se esse é um experimento a níveis fixos ou aleatórios.

b) Faça a análise da variância e conclua a respeito do efeito do tipo de argila.

c) Se for o caso, faça uma comparação múltipla de médias.

d) Plote um gráfico de barras para as médias.

2.4 Uma metalúrgica tem um grande número de fornos usados para fundição de metais. A temperatura desses fornos deveria ser a mesma. Para testar essa hipótese foram feitas medições em 4 fornos escolhidos aleatoriamente. Analise os resultados e conclua a respeito de possíveis diferenças entre os fornos.

Forno	Temperatura				
1	824	821	829	808	815
2	817	830	819	809	825
3	822	810	831	824	818
4	826	828	810	820	815

2.5 Um engenheiro industrial desenvolveu um modelo estocástico de simulação que prevê a produtividade mensal em função do intervalo de tempo entre manutenções preventivas. Se esse intervalo for muito curto, as máquinas estarão constantemente em manutenção e a produtividade será baixa. Se o intervalo for muito longo, haverá quebras, exigindo manutenção corretiva, mais demorada, novamente prejudicando a produtividade. Os resultados da simulação são.

Intervalo	Produtividade				
4	136	137	135	140	136
6	145	146	147	147	148
8	146	144	148	145	145
10	134	131	136	134	133
12	117	119	117	115	116

Faça a análise da variância, plote um gráfico de barras para a produtividade média e conclua a respeito do intervalo ótimo para as intervenções da manutenção produtiva.

2.6 Em uma indústria química um catalisador é utilizado para acelerar um processo de deposição metálica. Foi feito um experimento variando-se a concentração desse catalisador e anotando-se o tempo necessário para completar o processo. Analise os dados usando a Tabela Anova. Depois faça uma comparação múltipla de médias, plote um gráfico de linhas e conclua a respeito da concentração ideal.

Concentração	Tempos			
10	18,8	19,0	18,4	19,6
15	12,5	12,0	13,2	12,6
20	10,6	11,1	10,8	11,7
25	11,2	10,4	10,1	10,6

2.7 Os técnicos de uma indústria de alimento precisam diminuir ao máximo a quantidade de água livre presente no produto final. Eles realizaram ensaios substituindo um dos componentes por um novo ingrediente (o ingrediente X), que não altera a qualidade do produto, mas que talvez tenha melhores condições de absorção de água livre. Analise os resultados obtidos usando a Tabela Anova. Depois faça uma comparação múltipla de médias, plote um gráfico de linhas e conclua a respeito do % ideal para o ingrediente X. A propósito, o ingrediente X tem o preço um pouco superior ao do ingrediente original.

% do componente X	**Atividade de água**			
0	0,91	0,92	0,88	0,88
25	0,75	0,80	0,72	0,74
50	0,65	0,59	0,59	0,62
75	0,62	0,60	0,58	0,65
100	0,61	0,64	0,59	0,60

3. Projetos Fatoriais com Dois Fatores

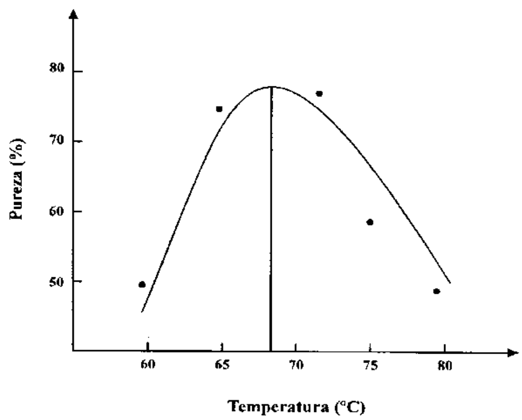
José Luis Duarte Ribeiro
Carla ten Caten

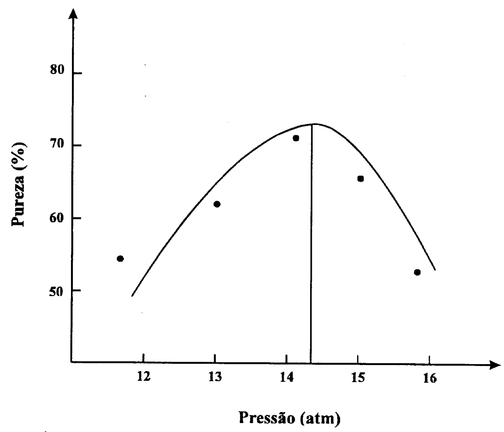
Exemplo do que muitas vezes se faz na indústria: Uma empresa estava interessada em aumentar o teor de pureza de uma substância química. Os dois fatores mais importantes que influenciavam o teor de pureza eram a temperatura e a pressão do reator.
Objetivo: determinar os níveis de temperatura e pressão que maximizassem o teor de pureza.
Como:
1. fixar a temperatura em 65 ^{o}C e variar pressão;
2. fixar a melhor pressão, variar a temperatura obtendo a resposta.

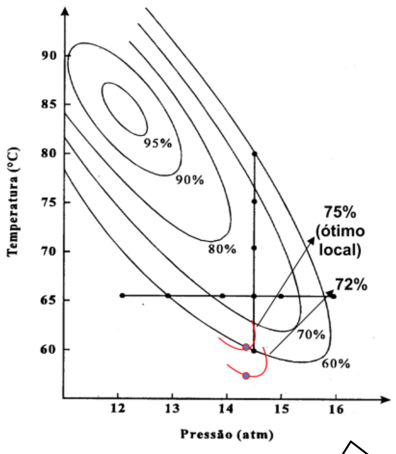
Neste exemplo os fatores foram testados um de cada vez

Temperatura fixada em 65°C

Pressão fixada em14,3 atm







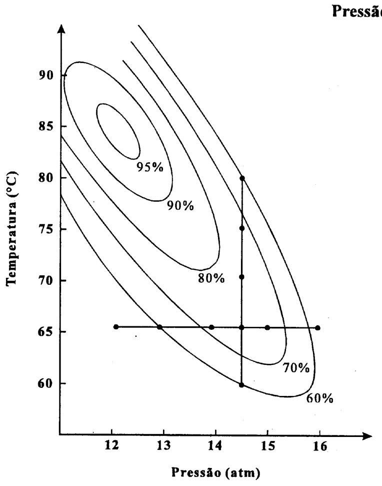
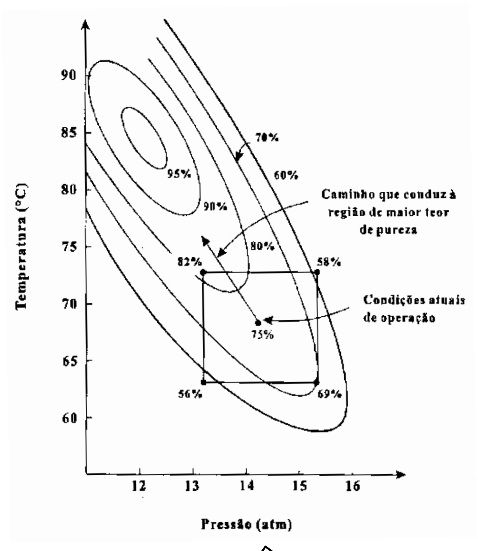


Gráfico com os fatores controlaveis testados um de cada vez (5 niveis cada)

O correto seria testar os dois fatores simultaneamente cada um no mínimo a dois níveis totalizando 4 ensaios. Os níveis são estabelecidos em torno ds condições operacionais atuais: temperatura 68°C, pressão 14,3 atm que resulta em uma pureza de 75%.



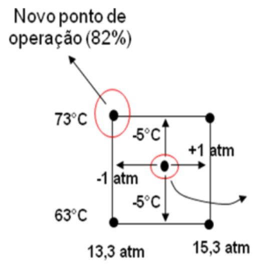


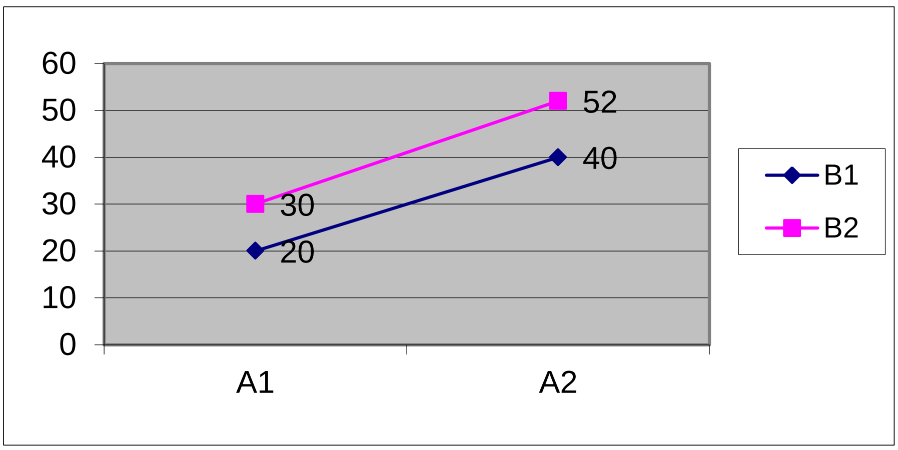
Grafico com os FC testados ao mesmo tempo (2 niveis cada)

Muitos experimentos envolvem o estudo de dois ou mais fatores. Se todas as combinações de níveis dos fatores são investigadas, então temos um projeto fatorial.Cada uma das possíveis combinações de níveis é chamada de “Tratamento” ou “setup”.

Por exemplo, sejam os dados da tabela a seguir:

		Fator B		
		B1	**B2**	**Média**
Fator A	**A1**	**20**	**30**	**25**
	A2	**40**	**52**	**46**
		30	**41**	

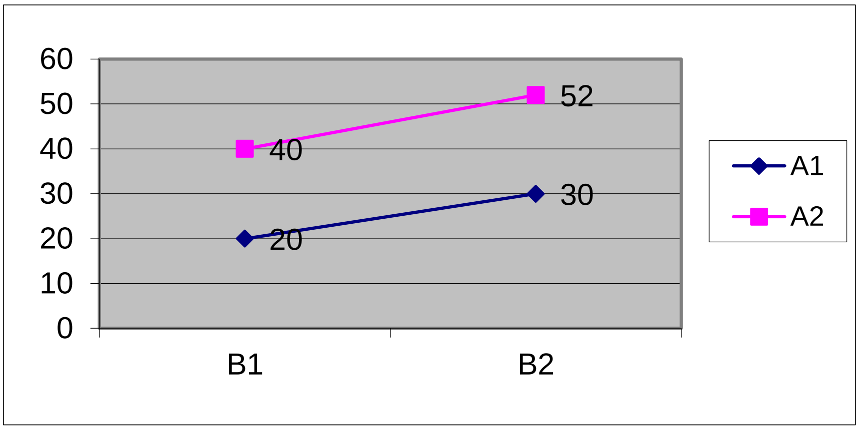
O efeito de um fator principal é definido como a mudança que aparece na variável de resposta quando se muda o nível deste fator, independente dos níveis do outro fator



Assim, $efeito\ de\ A = média\ A2 - média\ A1 = \frac{40+52}{2} - \frac{20+30}{2} = 46 - 25 = 21$

Isto é, passando do nível A1 para o nível A2 há uma mudança média na resposta de 21 unidades, independente dos níveis do fator B.

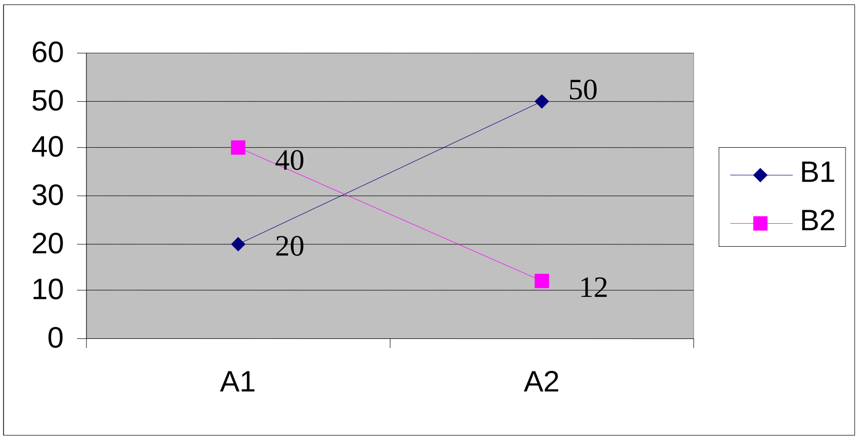
Similarmente, $efeito\ de\ B = média\ B2 - média\ B1 = \frac{30+52}{2} - \frac{20+40}{2} = 41 - 30 = 11$



Isto é, passando do nível B1 para o nível B2 há uma mudança média na resposta de 11 unidades.

Em alguns experimentos a diferença na resposta observada quando se modifica os níveis de um dos fatores irá depender do nível do outro fator. Por exemplo:

	B1	**B2**
A1	**20**	**40**
A2	**50**	**12**



Nesse caso, diz-se que há uma *interação* entre A e B.

Os gráficos de dois fatores são úteis para esclarecer a natureza da interação.

Quando a interação é forte, os efeitos principais têm pouco interesse prático, por exemplo, para esses dados:

$$Efeito\ A = média\ A2 - média\ A1 = \frac{50+12}{2} - \frac{20+40}{2} = 1$$

O fator A tem um efeito pequeno ? ERRADO!

O fator A tem um efeito pronunciado, mas esse efeito depende do nível do fator B:

Em B1 Efeito de A = 50 - 20 = 30

Em B2 Efeito de A = 12 - 40 = -28

3.1. VANTAGENS DOS EXPERIMENTOS FATORIAIS

Comparar:

	B1	B2
A1	x x	x x
A2	x x	

One-at-a-time

	B1	B2
A1	x	x
A2	x	x

Fatorial Cruzado

- Fatoriais cruzados são mais econômicos;
- Fatoriais cruzados permitem que se avalie interações.

3.2. OS EXPERIMENTOS FATORIAIS DE DOIS FATORES (TWO-WAY ANOVA)

Os experimentos fatoriais mais simples envolvem dois fatores;

Fator A com "a" níveis e Fator B com "b" níveis.

Cada repetição completa do experimento envolve "N=a x b" tratamentos (setups).

		Fator B 1	2	...	b
	1	$Y_{111}, Y_{112}, Y_{11n}$	$Y_{121}, Y_{122}, Y_{12n}$	...	$Y_{1b1}, Y_{1b2}, Y_{1bn}$
Fator A	2	$Y_{211}, Y_{212}, Y_{21n}$	$Y_{221}, Y_{222}, Y_{22n}$		: :
	: :	: :			: :
	a	$Y_{a11}, Y_{a12}, Y_{a1n}$	...	...	$Y_{ab1}, Y_{ab2}, Y_{abn}$

3.2.1. Modelo estatístico:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad i = 1, a \quad j = 1, b \quad k = 1, n$$

onde: μ é a média geral;

τ_i é o efeito do i-ésimo nível de A;

β_j é o efeito do j-ésimo nível de B;

$(\tau\beta_{ij})$ é o efeito da interação AB;

ε_{ijk} é o erro aleatório.

Suposições: $\varepsilon_{\varepsilon_{ijk}} \rightarrow N(0,\sigma)$

3.2.2. Hipóteses a serem testadas:

Para o fator A: $Ho: \tau_i = 0$

$H1: \tau_i \# 0$ para algum i.

Para o fator B: $Ho: \beta_i = 0$

$H1: \beta_i \# 0$ para algum j.

Para a interação AB: $Ho: \tau\beta_{ij} = 0$

$H1: \tau\beta_{ij} \# 0$ para algum ij.

3.2.3. Formulário para os cálculos da significância de A, B, AB: $\mathbf{TC} = \frac{(\mathbf{T}_{...})^2}{\mathbf{abn}}$

$$SQA = \frac{\sum(T_{i...})^2}{bn} - TC$$

$$SQB = \frac{\sum(T_{.j.})^2}{an} - TC$$

$$SQAB = \frac{\sum(T_{ij.})^2}{n} - TC - SQA - SQB$$

$$SQR = \sum y_{ijk}^2 - \frac{\sum(T_{ij.})^2}{n}$$

$$SQT = \sum y_{ijk}^2 - TC$$

Verificação:

SQT = SQA + SQB + SQAB + SQR

3.3. ANÁLISE DE VARIÂNCIA PARA PROJETOS CRUZADOS DE 2 FATORES

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	GDL	Médias Quadradas	Teste F
A	SQA	(a-1)	MQA	MQA/MQR
B	SQB	(b-1)	MQB	MQB/MQR
AB	SQAB	(a-1)(b-1)	MQAB	MQAB/MQR
Erro	SQR	ab(n-1)	MQR	
Total	SQT	abn-1		

Observações importantes:

O Valor esperado da MQR é igual a variância:

$$E(MQR) = \sigma^2$$

Se um fator ou interação não é significativo, o valor esperado do MQ fator é igual ao valor esperado da MQR.

Se um fator ou interação é significativo, o valor esperado da MQ fator será maior que o valor esperado da MQR.

Calcula-se o teste Fcalc

$$F_{calc} = \frac{Variância \;\; entre\ grupos}{Variância \;\; dentro\ do\ grupo} = \frac{MQG}{MQR}$$

O valor de Ftabelado é:

$$F_{tab} = F_{\alpha, GL_{numerador}, GL_{denomnador}}$$

Se F calculado > F tabelado ou valor-p<0,05 (5%) →Efeito correspondente é significativo

3.3.1. Exemplo

Suspeita-se que a máxima voltagem de saída de um tipo de bateria é afetada pelo material usado nas placas e pela temperatura. Quatro repetições completas de um experimento fatorial completo foram rodadas em laboratório e os seguintes dados foram obtidos:

Material (A)	Temperatura (B) 50	65	80	Ti.. =
1	130 155 74 180 **539** **(134,75)**	34 40 80 75 **229** **(57,25)**	20 70 82 58 **230** **(57,50)**	998 (83,17)
2	150 188 159 126 **623** **(155,75)**	151 137 121 130 **539** **(134,75)**	50 100 83 60 **293** **(73,25)**	1455 (121,25)
3	138 110 168 160 **576** **(144,00)**	174 120 150 139 **583** **(145,75)**	96 104 82 60 **342** **(85,50)**	1501 (125,08)
T.j. =	1738 (144,83)	1351 (112,58)	865 (72,08)	3954 (109,83)

$$TC = \frac{(3954)^2}{36} = 434281$$

$$SQA = \frac{(998)^2}{12} + \frac{(1455)^2}{12} + \frac{(1501)^2}{12} - 434281 = 12888$$

$$\mathrm{SQB} = \frac{(1738)^2}{12} + \frac{(1351)^2}{12} + \frac{(865)2}{12} - 434281 = 31892$$

$$SQAB = \frac{(539)^2}{4} + \frac{(229)^2}{4} + ... + \frac{(342)^2}{4} - 434281 - 12888 - 31892 = 8187$$

$$SQT = \sum y_{ijk}^2 - 434281 = 71611$$

$$SQR = 71611 - 12888 - 31892 - 8187 = 18644$$

3.3.2. Análise de variância

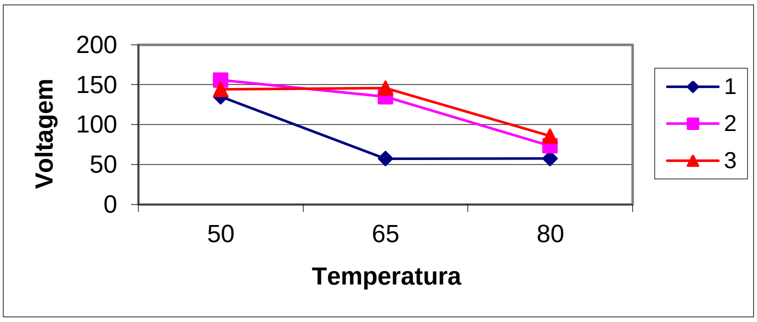
Fonte de Variação	Soma de Quadrados	GDL	Médias Quadradas	Teste F	F tab
Material (A)	12888	2	6444	9,3	3,35 S
Temper. (B)	31892	2	15946	23,1	3,35 S
AB	8187	4	2047	3,0	2,73 S
Erro	18644	27	691		
Total	71611	35			

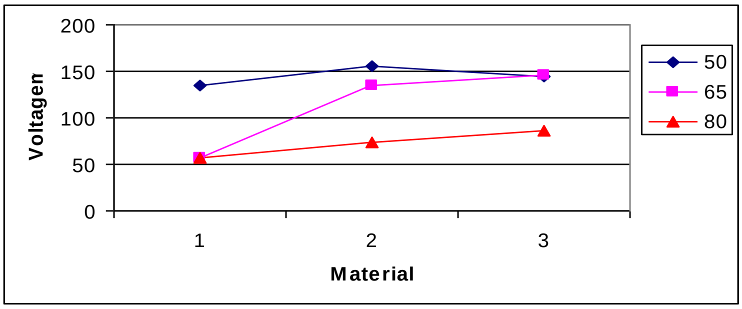
$$F_{tab_A} = F_{0,05;2;27} = 3{,}35$$

O efeito do Material, da Temperatura e da interação Material x Temperatura são significativos.

3.3.3. Gráfico de Interação

Quando a interação é significativa, a otimização deve ser realizada pelo gráfico de dois fatores pois os efeitos principais podem estar mascarados.





3.4. COMPARAÇÃO MÚLTIPLA DE MÉDIAS (CMM)

Se apenas os efeitos principais são significativos, a CMM deve ser realizada para cada fator individualmente. Nestes casos,o calculo do S_Y para os fatores A e B são:

$$S_{Y_{i..}} = \sqrt{\frac{MQR}{bn}} \qquad S_{Y_{.j.}} = \sqrt{\frac{MQR}{an}}$$

Se a interação é significativa (independentemente se os fatores principais são ou não significativos)

- CMM somente para a interação
- As comparações devem ser feitas no gráfico de dois fatores fixando-se um nível de um dos fatores e comparando as médias dos níveis do outro fator.
- Usar gráfico de linhas

Neste caso o S_Y para o efeito de interação AB é:

$$S_{Y_{ij.}} = \sqrt{\frac{MQR}{n}}$$

No exemplo, a interação AB foi significaiva, a otimização será realizada no gráfico de dois fatores. Como a variável de resposta é do tipo nominal-é-melhor, investiga-se se há DS entre as médias obtidas com os três tipos de materiais para a Temperatura de 65°C

(i) Médias em ordem crescente:

$\bar{y}_{12} = 57{,}25$ (material 1)

$\bar{y}_{22} = 134{,}75$ (material 2)

$\bar{y}_{32} = 145{,}75$ (material 3)

(ii) Desvio padrão das médias:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \longrightarrow \text{Teorema do limite central}$$

$$S_{\bar{y}} = \frac{\sqrt{MQR}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{691}}{\sqrt{4}} = \frac{26{,}2}{2} = 13{,}1$$

(iii) Limites de decisão

$$L_d = 3 \times S_{\bar{y}} = 39{,}3$$

(iv) Comparação duas a duas:

$$\bar{y}_{32} - \bar{y}_{22} = 145{,}75 - 134{,}75 = 11{,}0 \quad DNS$$

$$\bar{y}_{32} - \bar{y}_{12} = 145{,}75 - 57{,}25 = 88{,}5 \quad DS$$

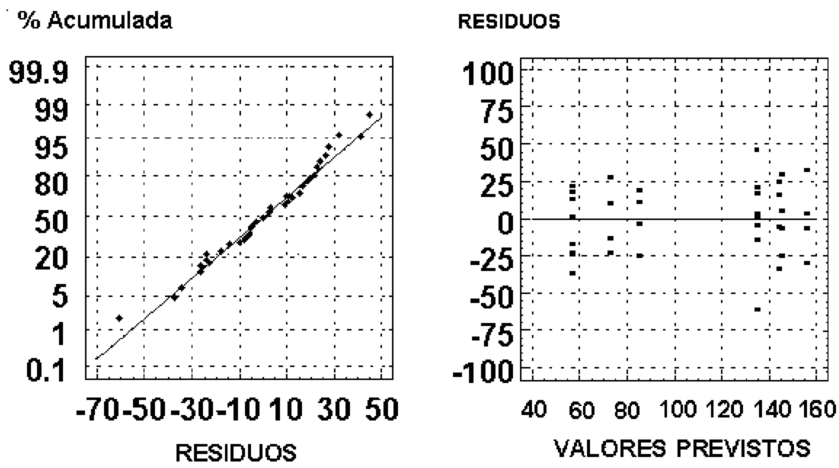
$$\overline{y}_{22} - \overline{y}_{12} = 134{,}75 - 57{,}25 = 77{,}5 \;\; DS$$

$$\overline{\overline{y}_{32}\ \overline{y}_{22}}\ \ \overline{\overline{y}_{12}}$$

O resultado da otimização indica que se deve utilizar as placas de material 2 ou 3 para se obter a máxima voltagem.

3.5. TESTE DAS SUPOSIÇÕES DO MODELO:

$$\varepsilon_{ijk} \rightarrow N(0,\sigma)$$



3.6. EXPERIMENTOS SEM REPETIÇÃO

Lembrando, o número de GDL do termo de erro vem dado por:

GDL=ab(n-1)

Se não há repetições do experimento, isto é, se n=1, não sobram GDL para calcular de modo independente a MQR.

$$MQR = \frac{SQR}{ab(n-1)} \longrightarrow$$ Indeterminado se o denominador é zero.

$$F_{cal} = \frac{MQG}{MQR} \longrightarrow$$ Logo Fcalc também será indeterminado.

Contudo, se há motivos para acreditar que a interação AB não é significativa, então:

E(MQAB) = E(MQR)

E é possível fazer a análise usando a MQAB como uma estimativa do termo de erro:

3.6.1. Tabela Anova

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	GDL	Médias Quadradas	Teste F
A	SQA	(a-1)	MQA	MQA/MQAB
B	SQB	(b-1)	MQB	MQB/MQAB
Erro (AB)	SQAB	(a-1)(b-1)	MQAB	
Total	SQT	abn-1		

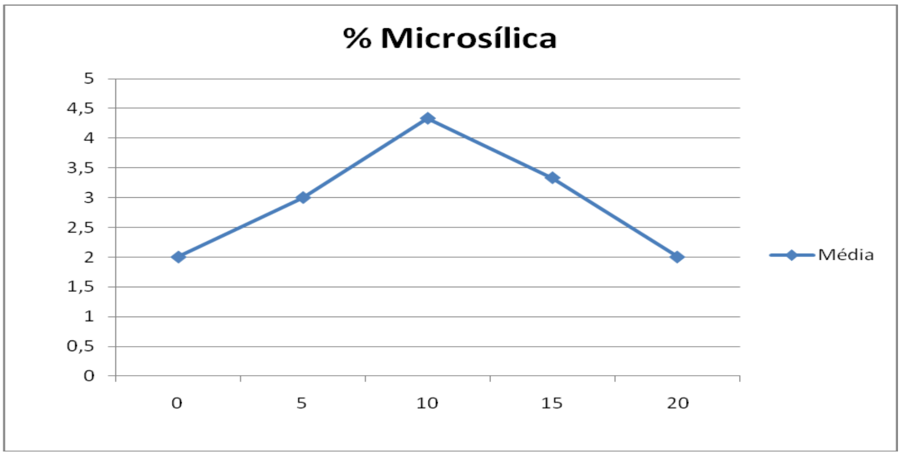
3.6.2. Exemplo:

Um pesquisador acredita que a resistência à tração de certos corpos de prova de argamassa depende da % de microssílica utilizada na sua fabricação e do operador que confecciona os CPs. Os dados revelaram:

	% de Microssílica					
Operador	0	5	10	15	20	Totais
1	4	5	6	5	3	23
2	1	3	4	3	2	13
3	1	1	3	2	1	8
Totais	6	9	13	10	6	44

3.6.2.1. Análise de variância

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	GDL	Médias Quadradas	Teste F	F tab
Operador	23,33	2	11,67	46,7	4,46 S
% Micros.	11,60	4	2,90	11,6	3,84 S
Erro (AB)	2,00	8	0,25		
Total	36,93	14			



Nível	Média	Diferença	Valor da dif		Limite
0	2,0	0-5	1,0	>	Ld=0,87
5	3,0	5-10	1,3	>	Ld=0,87
10	4,3	10-15	1,0	>	Ld=0,87
15	3,3	15-20	1,3	>	Ld=0,87
20	2,0				

Como a resistência é do tipo maior-é-melhor, o melhor % de microssilica é 10%

EXERCÍCIOS

3.1. A resistência à tração de um produto de papel (Y) parece estar relacionada à % de madeira escura (A) presente na polpa e à Temperatura (B) dos rolos de manufatura. Dados experimentais revelaram:

	Temperatura dos rolos (B)				
% de Madeira escura	0	5	10	15	Totais
5%	15 13	23 27	32 33	34 38	
10%	31 28	38 39	43 40	41 39	
Totais					514

Pergunta-se:

Qual a variável de resposta ?

Quais os fatores controláveis e Qual o número de níveis dos fatores controláveis ?

Faça a análise de variância e indique quais os efeitos significativos ?

Faça um gráfico de dois fatores.

O que fazer para assegurar qualidade ? (Resistência maior-é-melhor)
O que fazer para assegurar economia ? (Supor que um aumento na % de madeira escura ou na temperatura dos rolos implica maior custo)

Solução:

a) Variável de resposta:

b) Fatores controláveis e número de níveis

c) Análise de variância

TC =

SQA =

SQB =

SQAB =

SQR =

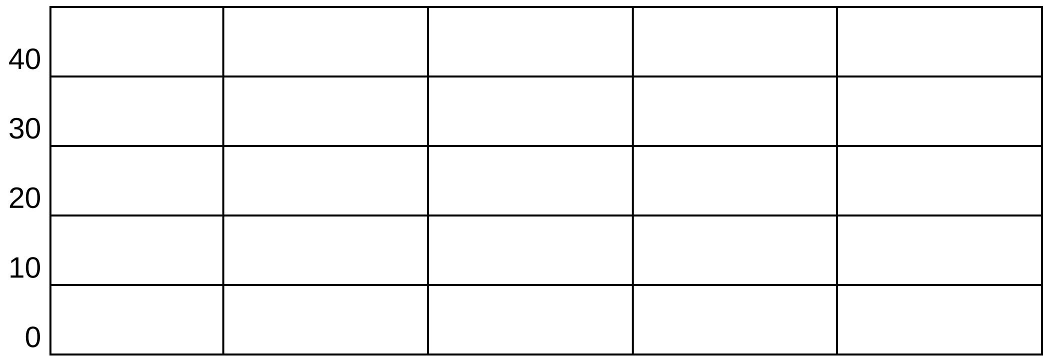
SQT =

Fonte	SQ	GDL	MQ	F calc.	F tab.	Signif. ?
% Madeira esc. (A)						
Temperatura (B)						
AB						
Erro						
Total						

Efeitos significativos:

d) Gráfico de dois fatores

Resistência à tração



e) Tomada de decisão

3.2. Um engenheiro está estudando a rugosidade (menor-é-melhor) do acabamento superficial de peças metálicas produzidas por três máquinas (A1, A2, A3). Essas máquinas podem trabalhar em duas velocidades (B1 = 10 partes/min. ou B2 = 15 partes/min.). Os dados revelaram os seguintes valores de rugosidade superficial:

	A1	A2	A3	Totais
B1	33,2 32,6 34,3	32,7 33,4 31,5	36,3 38,5 38,7	
B2	36,6 35,5 37,4	37,2 38,6 36,6	39,6 42,6 43,1	
Totais				

a) Qual a variável de resposta e quais os fatores controláveis ?

b) Faça a análise de variância e conclua sobre a significância dos fatores em estudo;

c) Plote um gráfico relacionando os fatores controláveis com a resposta medida;

d) Com base nos resultados da Anova, indique o que você pensa que poderia ser feito para maximizar a qualidade.

3.3. Os dados a seguir representam os tempos de montagem obtidos em um estudo que envolveu três operadores e dois layouts para os postos de trabalho.

	Operador 1	Operador 2	Operador 3	Totais
Layout 1	17,4 18,3 18,2	18,8 17,6 17,5	16,8 15,7 15,7	
Layout 2	16,8 15,5 15,7	15,2 16,4 16,2	15,0 13,6 13,7	
Totais				

a) Qual a variável de resposta e quais os fatores controláveis ?

b) Faça a análise de variância e conclua sobre a significância dos fatores em estudo;

c) Plote um gráfico relacionando os fatores controláveis com a resposta medida;

d) Com base nos resultados da Anova, indique o que você pensa que poderia ser feito para maximizar a produtividade.

3.4. Um Engenheiro de alimentos está tentando ajustar o percentual de gordura do produto final. O valor ideal é 10%, mas o engenheiro sabe que esse valor depende da vazão de gorduras e, talvez da origem da matéria prima. Analise os dados a seguir, usando a Anova e um gáfico de dois fatores, e conclua sobre o melhor ajuste para esse processo.

	Uruguai	Oeste do RS	Sta. Catarina	Totais
Vazao = 30	11,5 11,2 11,7	9,9 10,2 9,8	9,2 9,5 8,9	
Vazao = 50	12,7 13,3 12,9	11,7 11,3 11,4	10,2 10,5 10,5	
Totais				

4. Generalização dos Projetos Fatoriais

José Luis Duarte Ribeiro
Carla ten Caten

Os resultados do Projeto Fatorial de 2 fatores podem ser estendidos para o caso onde há vários fatores:

Fator A,	a níveis
Fator B,	b níveis
Fator C,	c níveis
:	
n observações por parcela	

O número total de observações é N = a x b x c x ... x n

4.1. MODELO ESTATÍSTICO:

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

i = 1, a

j = 1, b

k = 1, c

l = 1, n

onde:

μ	é a média geral;
τ_i	é o efeito do i-ésimo nível de A;
β_j	é o efeito do j-ésimo nível de B;
$(\tau\beta_{ij})$	é o efeito da interação AB;
:	
ε_{IJKL}	é o erro aleatório.

Suposições: $\varepsilon_{IJKL} \rightarrow N(0, \sigma)$

4.1.1. Hipóteses a serem testadas:

Para o fator A: $Ho: \tau_i = 0$
$H1: \tau_i \# 0$para algum i.

:

Para a interação AB: $Ho: \tau\beta_{ij} = 0$
$H1: \tau\beta_{ij} \# 0$ para algum ij.

:

Para a interação ABC: $Ho: \tau\beta\gamma_{ijk} = 0$
$H1: \tau\beta\gamma_{ijk} \# 0$

4.1.2. Formulário para os cálculos

$TC = \frac{(T_{....})^2}{abcn}$; SQA $= \frac{\sum(T_{i...})^2}{bcn} - TC$

$SQB = \frac{\sum(T_{.j..})^2}{acn} - TC$; $SQC = \frac{\sum(T_{..k.})^2}{abn} - TC$

$$SQAB = \frac{\sum(T_{ij..})^2}{cn} - TC - SQA - SQB$$

$$SQAC = \frac{\sum(T_{i.k.})^2}{bn} - TC - SQA - SQC$$

$$SQBC = \frac{\sum(T_{.jk.})^2}{an} - TC - SQB - SQC$$

$$SQABC = \frac{\sum(T_{ijk.})^2}{n} - TC - SQA - SQB - SQC - SQAB - SQAC - SQBC SQR = \sum y_{ijkl}^2 - \frac{\sum(T_{ijk.})^2}{n}$$

$$SQT = \sum y_{ijkl}^2 - TC$$

VERIFICAÇÃO
SQT = SQA + SQB + SQC + SQAB + ... + SQR

4.1.3. Tabela anova para projetos cruzados de 3 fatores

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	GDL	Médias Quadradas	Teste F
A	SQA	(a-1)	MQA	MQA/MQR
B	SQB	(b-1)	MQB	MQB/MQR
C	SQC	(c-1)	MQC	MQC/MQR
AB	SQAB	(a-1)(b-1)	MQAB	MQAB/MQR
AC	SQAC	(a-1)(c-1)	MQAC	MQAC/MQR
BC	SQBC	(b-1)(c-1)	MQBC	MQBC/MQR
ABC	SQABC	(a-1)(b-1)(c-1)	MQABC	MQABC/MQR
Erro	SQR	abc(n-1)	MQR	
Total	SQT	abcn-1		

Se F calculado > F tabelado ou valor-p<0,05 (5%) $\rightarrow$ Efeito correspondente é significativo

Observações:

O Valor esperado da MQR é igual a variância:

$E(MQR) = \sigma^2$

Se um fator ou interação não é significativo, o valor esperado de sua MQ fator é igual ao valor esperado da MQR (erro).

Se não houver repetições (n = 1) uma possibilidade é usar a MQ da interação ABC como estimativa da MQR.

4.1.4. Exemplo

Um fabricante de refrigerantes está estudando o efeito da % de carbonatação (A), pressão de enchimento (B) e velocidade da linha (C) sobre o volume do refrigerante. Os dados revelaram:

Tabela com as somas e médias entre parêntesis para elaboração dos gráficos de dois fatores

	Pressão de Enchimento (B) 20 psi		25psi		
%Carbonatação (A)	Velocidade (C) 100	120	Velocidade (C) 100	120	T.i..
10	-1 0 (-1)	-3 -1 (-4)	1 1 (2)	-1 0 (-1)	-4
12	2 1 (3)	0 1 (1)	6 5 (11)	2 3 (5)	20
14	7 6 (13)	5 4 (9)	10 11 (21)	7 9 (16)	59
T.j..	21		54		
T..k.	T..1. = 49; T..2. = 26				T....=75

Tij..

A \ B	20	25
0	-5 (-1,25)	1 (0,25)
2	4 (1,00)	16 (4,00)
4	22 (5,50)	37 (9,25)

Ti.k.

A \ C	100	120
0	1 (0,25)	-5(-1,25)
2	14(3,50)	6 (1,50)
4	34(8,50)	25(6,25)

T.jk.

B \ C	100	120
0	15(2,50)	6 (1,00)
5	34(5,67)	20(3,33)

Tij..

	B1(20)	**B2(25)**	
A1(10)	-5	1	**-4**
A2(12)	4	16	**20**
A3(14)	22	37	**59**
	21	**54**	

Ti.k.

	C1(100)	**C2(120)**	
A1(10)	1	-5	**-4**
A2(12)	14	6	**20**
A3(14)	34	25	**59**
	49	**26**	

T.jk.

	C1(100)	**C2(120)**	
B1(20)	15	6	**21**
B2(25)	34	20	**54**
	49	**26**	

$$TC = \frac{75^2}{abcn} = 234{,}375$$

$$SQA = \frac{(-4)^2 + (20)^2 + \ \dots + (59)^2}{8} - TC = 252{,}750$$

:

$$SQAB = \frac{(-5)^2 + (4)^2 + \ \dots + (37)^2}{4} - TC - SQA - SQB = 5{,}250$$

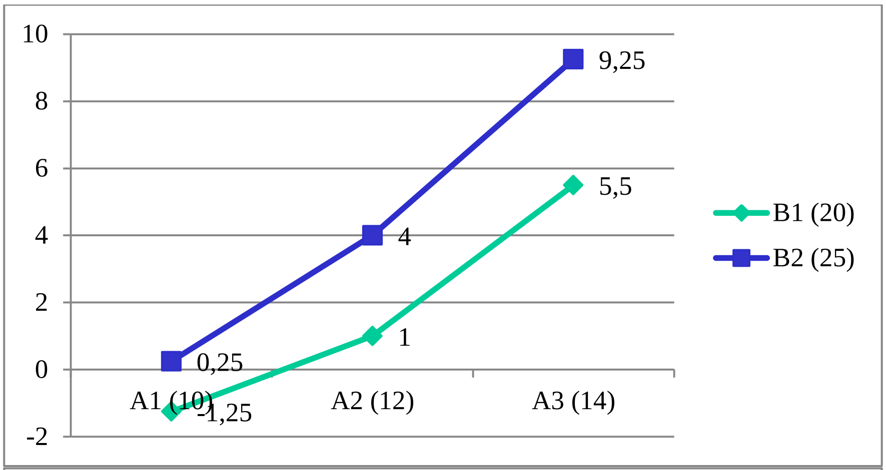
:

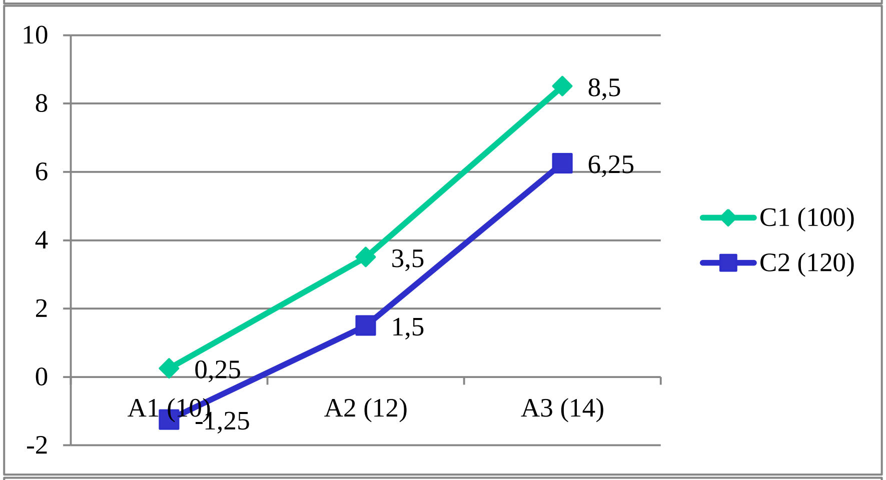
$$\text{SQABC} = \frac{(-1)^2 + (3)^2 + \ \dots + (16)^2}{2} - TC - SQA - SQB - SQC - SQAB - SQAC - SQBC = 1{,}083$$

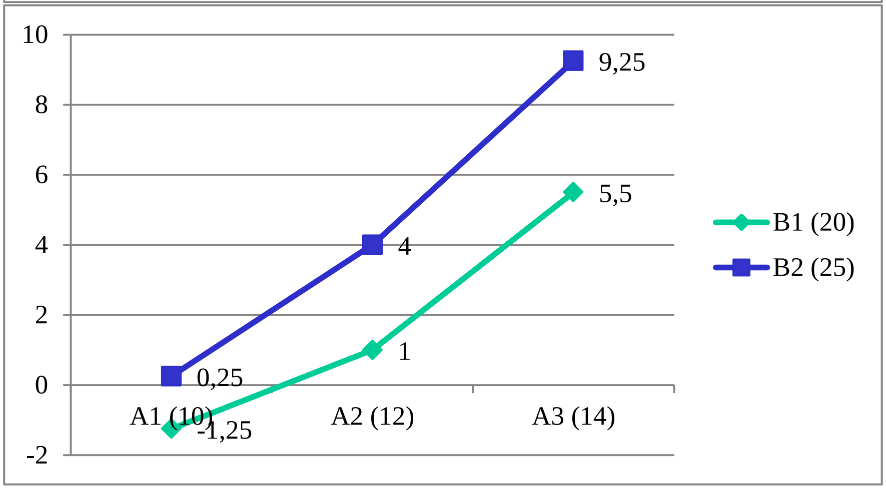
4.1.5. Tabela Anova

Fonte	SQ	GDL	MQ	F calc.	F tab.
A: % Carb.	252,75	2	126,38	178,4 *	3,89
B: Pressão	45,38	1	45,38	64,1 *	4,75
C: Veloc.	22,04	1	22,04	31,1 *	4,75
AB	5,25	2	2,63	3,7 (*)	3,89
AC	0,58	2	0,29	0,4	3,89
BC	1,04	1	1,04	1,5	4,75
ABC	1,08	2	0,54	0,8	3,89
Erro	8,50	12	0,71		
Total	336,63	23			

4.1.6. Gráficos de dois fatores







4.1.7. Projetos com fatores aninhados

Considere o seguinte experimento:

Materiais 1			2			3		
Temperatura			Temperatura			Temperatura		
50	75	100	50	75	100	50	75	100
x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x

Trata-se de um projeto fatorial ***cruzado***, cuja tabela também poderia ser apresentada como:

		Materiais	
	1	2	3
50	x x	x x	x x
Temper. 75	x x	x x	x x
100	x x	x x	x x

Mas agora vamos analisar o seguinte experimento:

Materiais 1			2			3		
Temperatura			Temperatura			Temperatura		
40	50	60	100	120	140	60	75	90
x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x

Agora, Materiais e Temperatura ***não*** estão cruzados

Conforme o material (Fator A), os níveis de Temperatura (Fator B) são ***diferentes***.

Nesse caso temos um experimento com **Fatores Aninhados**.

Diz-se que os níveis do fator B estão aninhados dentro dos níveis do fator A

Não é possível verificar a existência de uma interação AB.

4.2. MODELO ESTATÍSTICO:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}$$

Como fazer o cálculo das Médias Quadradas ?

→ Usar o mesmo formulário do Projeto cruzado.

→ Aglutinar algumas Somas Quadradas para fazer a análise correta

Projeto Fatorial A e B cruzados		Projeto Fatorial Aninhado B aninhado em A			
SQ	GDL	SQ	GDL	MQ	F
SQA	(a-1)	SQA	(a-1)	MQA	MQA/MQR
SQB	(b-1)	SQB(A)	a(b-1)	MQB(A)	MQB(A)/MQR
SQAB	(a-1)(b-1)	(SQB + SQAB)			
SQR	ab(n-1)	SQR	ab(n-1)	MQR	
SQT	abn-1	SQT	abn-1		

4.3. EXPERIMENTOS COM FATORES ANINHADOS E CRUZADOS

Em certos experimentos pode ocorrer de alguns fatores estarem cruzados e outros aninhados.

4.3.1. Exemplo

Uma fábrica tem produzido azulejos que têm se mostrado muito quebradiços (baixa resistência à tração). Os engenheiros desconfiam que 3 fatores podem afetar a resistência:

A: Quantidade de Feldspato
B: Tipo de Aglutinante (3 fornecedores)
C: Quantidade de Aglutinante

Decide-se rodar um experimento envolvendo esses fatores. Observa-se que cada fornecedor de aglutinante sugere uma quantidade ideal de aplicação de seu produto. Mas como a quantidade de aglutinante pode afetar a resistência à tração, usa-se dois níveis deste fator: um nível 10% abaixo da indicação do respectivo fornecedor e outro 10% acima. Os ensaios revelaram:

	Tipo de Aglutinante						
	B1		B2		B3		
	Quantidade		Quantidade		Quantidade		
	C1(9)	C2(11)	C1(18)	C2(22)	C1(27)	C2(33)	Ti...
A1	10,0 11,0	13,4 12,6	13,6 11,0	13,7 12,4	13,5 10,2	14,4 11,0	146,8
A2	14,8 16,5	13,9 15,6	13,8 15,0	16,7 14,9	12,3 15,5	14,7 13,6	177,0
A3	17,2 14,4	17,6 19,4	18,0 17,6	16,6 17,0	14,5 18,8	13,7 15,6	200,4
T.j..	176,1		180,3		167,8		524,2

T..k. $\Rightarrow$ T..1. = 257,7 ; T..2. = 266,5

Tij..

	B1	B2	B3
A1	47,0	50,7	49,1
A2	60,5	60,4	56,1
A3	68,6	69,2	62,6

Ti.k.

	C1	C2
A1	69,3	77,5
A2	87,9	89,1
A3	100,5	99,9

T.jk.

	C1	C2
B1	83,9	92,2
B2	89,0	91,3
B3	84,8	83,0

TC = $(524,2)^2 / 36 = 7632,934$

$$SQB = \frac{(176,1)^2 + (180,3)^2 + \ldots + (167,8)^2}{12} - \mathrm{TC} = 6,74$$

$$SQBC = \frac{(83,9)^2 + (89,0)^2 + \ldots + (83,0)^2}{6} - \mathrm{TC} - \mathrm{SQB} - \mathrm{SQC} = 4,30$$

SQT = $(10,0)^2 + (11,0)^2 + \ldots + (15,6)^2$] - TC = 198,35

C aninhado em B $\rightarrow$ Aglutinar Somas Quadradas

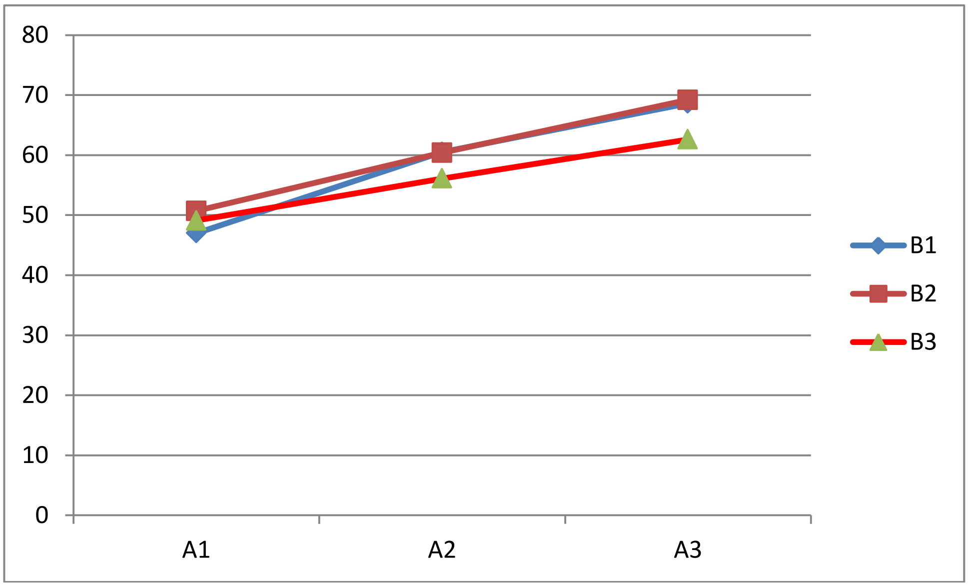
Cruzado SQ	GDL	Aninhado SQ	GDL
SQA = 120,35	2	SQA	2
SQB = 6,74	2	SQB	2
SQAB = 4,79	4	SQAB	4
SQC = 2,15	1	SQC(B)=6,45	3
SQBC = 4,30	2	SQC (2,15)+SQBC (4,30)	
SQAC = 3,60	2	SQAC(B)=16,50	6
SQABC = 12,90	4	SQAC (3,60)+SQABC (12,90)	
SQR = 43,51	18	SQR	18
SQT = 198,35	35	SQT	35

4.3.2. Tabela Anova para o exemplo

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F	F tab
A: Feldsp.	120,35	2	60,17	24,9	3,55
B: Tipo de Agl.	6,74	2	3,37	1,4	3,55
AB	4,79	4	1,20	0,5	2,93
C(B)	6,45	3	2,15	0,9	3,16
AC(B)	16,50	6	2,75	1,1	2,66
Erro	43,51	18	2,42		
Total	198,35	35			

Apenas o fator A (Quantidade de Feldspato) é significativo

4.3.3. Gráfico de 2 fatores



Para maximizar-se a resistência à tração, deve-se aumentar a quantidade de feldspato

4.4. EXERCÍCIOS

4.1. Deseja-se maximizar a resistência de uma cera a base de carnaúba. Após uma brainstorm os engenheiros decidiram que três fatores podem ter um efeito importante sobre a resistência à tração:

A: % de Etileno Vinil Acetato adicionada à cera

B: Fornecedor de carnaúba (há dois fornecedores na região).

C: % de parafina adicionada à cera

Para decidir quais desses fatores ou interações entre eles são efetivamente significativos, foi rodado um experimento e os seguintes dados foram coletados:

	Fornecedor de Carnaúba (B)						
	Fornecedor 1			Fornecedor 2			
	Qtdade de Parafina (C)			Qtdade de Parafina			
EVA(A)	10	12	14	10	12	14	Totais
4	28,0 37,9 30,3	48,0 53,3 47,0	32,0 33,7 33,4	35,1 33,4 33,8	49,5 46,8 48,2	26,4 28,0 30,0	
6	45,7 43,9 44,7	60,0 65,6 65,8	44,0 48,4 46,6	46,7 50,8 52,6	59,8 57,8 55,2	43,2 34,0 43,8	
8	56,2 53,1 55,5	78,3 66,8 73,9	59,0 60,4 59,6	51,8 57,0 53,9	79,6 70,0 73,9	52,6 59,1 55,1	
10	52,6 46,8 52,6	70,9 66,3 75,8	46,2 48,7 52,2	50,2 48,8 50,3	67,1 73,3 71,8	51,8 48,7 50,7	
Totais							

Pede-se:

a) Qual a variável de resposta?

b) Quais os fatores controlaveis? Quantos níveis?

c) Quais os efeitos significativos?

d) Faça os gráficos de dois fatores pertinentes.

e) O que fazer para obter qualidade e economia.(Considere que um aumento na % de EVA ou na % de parafina implica maior custo, e que o fornecedor 1 (B1) tem o menor preço).

Solução:

a) Variável de resposta:

b) Fatores controláveis e número de níveis:

c) Análise de variância:

TC = 192 613,55

SQB =

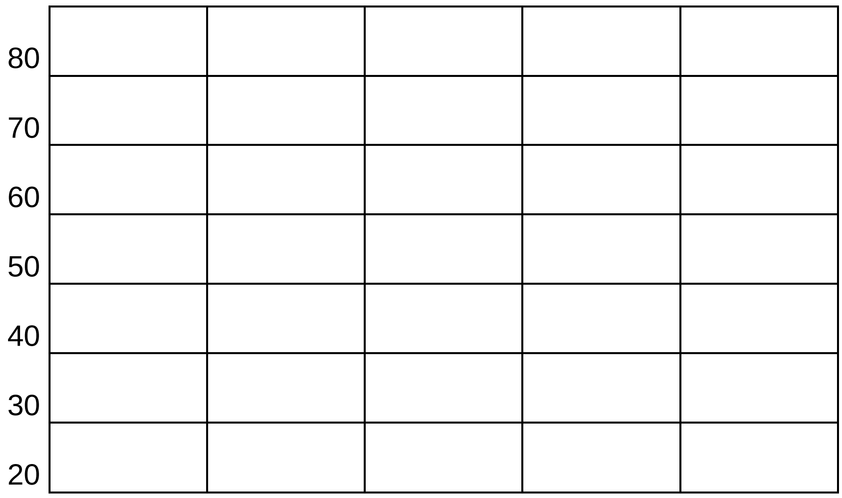
SQBC =

Fonte	SQ	GDL	MQ	F calc.	F tab.	Signif. ?
SQA	6060,54					
SQB						
SQC	5030,65					
SQAB	12,97					
SQAC	150,44					
SQBC						
SQABC	121,85					
Erro	480,79					
Total						

Efeitos significativos:

d) Gráficos de dois fatores

Resistência à tração



e) Tomada de decisão

4.2. Supõe-se que a tensão de cisalhamento suportada por peças coladas depende do fornecedor de adesivo e da pressão e temperatura usadas no processo de colagem. Analise os dados a seguir, respondendo as mesmas questões enunciadas no exercício 4.1.

Fornec:	1			2		
Temp: Pressões	250	260	270	250	260	270
120	10,1	11,2	12,5	10,6	12,3	10,0
130	9,2	10,6	11,4	10,7	11,1	10,6
140	10,3	10,1	11,7	9,4	12,0	10,1
150	9,0	10,1	12,2	10,0	11,4	10,8

4.3. Sabe-se que a tensão de cisalhamento suportada por peças coladas depende do fornecedor de adesivo e da temperatura usadas no processo de colagem. Além disso, diferentes fornecedores sugerem diferentes temperaturas ótimas de colagem. Indique qual o modelo estatístico desse experimento e, depois, analise os dados a seguir, respondendo as mesmas questões enunciadas no exercício 4.1.

Fornecedor:	1			2		
Temperatura:	270	280	290	250	260	270
	12,3	12,9	11,9	9,7	12,1	10,1
	11,2	13,5	11,3	10,1	11,5	10,7
	12,2	13,9	11,1	10,3	12,5	10,5
	11,6	12,7	12,2	10,5	11,0	9,7

4.4. Uma empresa de produtos alimentícios está está interessada em aumentar a densidade de um dos novos produtos em desenvolvimento. No entanto, isso deve ser feito variando alguns parâmetros em intervalos estreitos, pois a produção fora desses intervalos irá piorar o sabor do produto. Analise os dados a seguir e identifique quais fatores exerceram efeito significativo sobre a densidade. Depois, plote gráficos de dois fatores e conclua a respeito do melhor ajuste para o processo. Considere que o ajuste central é mais seguro em relação a sabor, mas variações dentro da faixa estudada não comprometem o produto.

Vazão de Gordura:	30			50		
Temperatura: Pressão	75	80	85	75	80	85
120	0,35	0,34	0,35	0,39	0,40	0,38
130	0,37	0,35	0,38	0,41	0,40	0,42
140	0,39	0,38	0,37	0,43	0,43	0,44
150	0,40	0,39	0,41	0,45	0,46	0,45

5. Blocos Aleatorizados e Quadrados Latinos

José Luis Duarte Ribeiro
Carla ten Caten

Vamos analisar 4 tipos de experimentos:

Projetos completamente aleatorizados
Projetos em blocos aleatorizados
Quadrados Latinos
Quadrados Greco-Latinos

Focando no modelo estatístico e na informação que pode ser obtida de cada um desses experimentos.

Para apresentar esses modelos, vamos considerar o exemplo de uma locadora de automóveis que deseja comparar o desgaste de quatro marcas de pneus.

Nesse exemplo tem-se:

Variável de resposta: Desgaste dos pneus
(diferença de espessura após 20.000 Km de uso)

Variável principal: Marca de pneu
(é um fator a níveis fixos - 4 marcas de pneu)

Variáveis secundárias possíveis:
Carro
Posição dos pneus no carro
Motorista

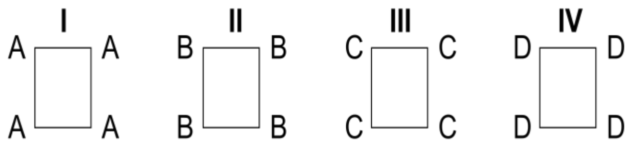
Variáveis não controláveis:
Temperatura, Umidade, Terreno, etc.

Usando letras para indicar as 4 marcas de pneus e números romanos para indicar os carros, o experimento poderia ser efetuado da seguinte forma:

Exemplo de um experimento mal planejado:

Usando *letras* para indicar as 4 *marcas* de pneus e *números romanos* para indicar os *carros*, o experimento poderia ser efetuado da seguinte forma:

	Carros		
I	II	III	IV
A	B	C	D
A	B	C	D
A	B	C	D
A	B	C	D



Imediatamente podemos ver falhas nesse projeto, uma vez que os totais para as marcas também serão totais para os carros!

Nesse projeto, o efeito das marcas e dos carros está confundido, e a análise fica prejudicada. Exemplo de um experimento mal planejado.

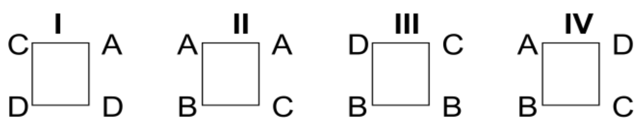
5.1. PROJETOS COMPLETAMENTE ALEATORIZADOS

Uma segunda tentativa poderia ser um projeto completamente aleatorizado. Nesse tipo de projeto, a distribuição dos pneus nos carros é feita de modo completamente aleatória.

Por exemplo, coloca-se numa cartola as fichas representando os 16 pneus. Então, os 4 primeiros a serem retirados seguem no carro 1, e assim por diante.

Os resultados desse procedimento poderiam gerar o projeto que aparece a seguir:

	Carros			
	I	II	III	IV
Marcas e	C(12)	A(14)	D(10)	A(13)
(Desgaste)	A(17)	A(13)	C(11)	D(9)
	D(13)	B(14)	B(14)	B(8)
	D(11)	C(12)	B(13)	C(9)



O propósito da aleatorização é espalhar, sobre os totais de todas as marcas, qualquer efeito de carros ou de outras variáveis não-controladas.

5.1.1. Modelo estatístico do projeto completamente aleatorizado:

$$Y_{ij} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

onde μ é a média geral, β_j indica o efeito de cada marca , e ε_{ij} é o erro aleatório. As suposições para a análise são:

$$\Sigma \beta_j = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{ij} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

Para esse modelo, os resíduos em relação a média geral podem ser decompostos da seguinte maneira:

$$(y_{ij} - \bar{y}..) = (\bar{y}._j - \bar{y}..) + (y_{ij} - \bar{y}._j)$$

Elevando ao quadrado e efetuando o somatório, resulta:

$$SQT = SQM + SQR$$

Associadas aos seguintes GDL:

$$(N - 1) = (a - 1) + (N - a)$$

Nos interessa testar a hipótese:

H_0: $\beta_j = 0$

H_1: $\beta_j \neq 0$ para algum j

Para tanto usamos o teste F, uma vez que pode ser demonstrado que quando $\beta_j = 0$ resulta: E(MQM) = E(MQR)

Para o cálculo das Somas Quadradas, usamos o formulário tradicional:

$$TC = (\sum T..)^2/N$$
$$SQM = \left(\sum T_j^2/a\right) - TC$$
$$SQT = \left(\sum y_{ij}^2\right) - TC$$
$$SQR = SQT - SQM$$

Para o exemplo em questão, os totais de cada marca valem:

A	B	C	D	
17	14	12	13	
14	14	12	11	← Desgastes medidos em cada pneu
13	13	11	10	
13	8	9	9	
57	49	44	43	= 193

Assim, as somas quadradas resultam:

SQM = $(57^2 + 49^2 + 44^2 + 43^2) / 4$ - 2328,06 = 30,69

SQT = 2409,00 - 2328,06 = 80,94

SQR = SQT – SQM = 80,94 - 30,69 = 50,25

5.1.2. Tabela ANOVA para o projeto completamente aleatorizado

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F	F tab
Marcas	30,69	3	10,23	2,44	3,49 S
Resíduo	50,25	12	4,19		
Total	80,94	15			

Para esse projeto, o valor calculado de ***F*** resulta menor que o tabelado. Assim, a hipótese nula não pode ser rejeitada !

5.2. PROJETOS EM BLOCOS ALEATORIZADOS

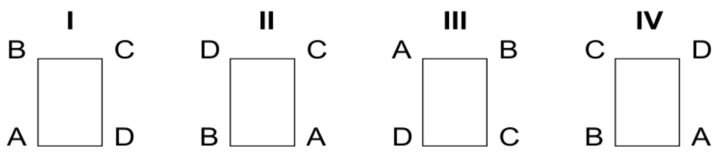
Um exame mais cuidadoso do projeto completamente aleatorizado irá revelar algumas desvantagens. Por exemplo, nota-se que a marca A não foi usada no carro III, mas foi usada duas vezes no carro II, etc.

Assim, pode estar embutido na marca A algum efeito que possa existir entre os carros II e III.

Seria interessante desenvolver uma estratégia para bloquear um possível efeito dos carros. Isso pode ser feito usando um *Projeto em Blocos Aleatorizados*.

Nesse tipo de projeto, impõe-se que cada marca apareça um mesmo número de vezes em cada carro, conforme aparece no arranjo a seguir:

	Carros			
	I	II	III	IV
Marcas e	B(14)	D(11)	A(13)	C(9)
(Desgaste)	C(12)	C(12)	B(13)	D(9)
	A(17)	B(14)	D(10)	B(8)
	D(13)	A(14)	C(11)	A(13)



5.2.1. Modelo estatístico do projeto em blocos aleatorizado:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

onde τ_i é acrescentado (ou melhor, é separado do termo de erro experimental). O termo τ_i indica o efeito dos carros, que antes não podia ser calculado apropriadamente.

As suposições para a análise são:

$$\tau_i \rightarrow N(0, \sigma_\tau^2) \quad ; \quad \varepsilon_{ij} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

5.2.2. Decomposição dos Resíduos

Para esse modelo a decomposição dos resíduos leva às seguintes somas quadradas:

SQT = SQC + SQM + SQR

Indicando o número de carros e o número de marcas por "***a***", os respectivos graus de liberdade resultam:

(N - 1) = (a - 1) + (a - 1) + (N - 2a + 1)

5.2.3. Teste de Hipóteses

A hipótese principal que queremos testar continua sendo em relação às marcas de pneu. Mas neste projeto também podemos testar se há diferenças entre os carros. Os cálculos aparecem a seguir:

		Marcas				
		A	B	C	D	Totais
	I	17	14	12	13	56
Carros	II	14	14	12	11	51
	III	13	13	11	10	47
	IV	13	8	9	9	39
Totais		57	49	44	43	= 193

Para fins didáticos, estamos usando as mesmas observações anteriores, apenas redistribuindo-as ao longo dos carros. Assim, a SQT e a SQM continuam as mesmas. Mas é preciso calcular:

$SQC = (56^2 + 51^2 + 47^2 + 39^2)/4 - 2328{,}06 = 38{,}69$

$SQR = SQT - SQM - SQC = 80{,}94 - 30{,}69 - 38{,}69 = 11{,}56$

Pode ser observado que a SQR diminuiu de 50,25 para 11,56 porque foi extraído o efeito dos carros (38,69). Assim, o projeto em blocos aleatorizados efetivamente reduz a variância residual.

5.2.4. Tabela ANOVA para o projeto em blocos aleatorizados

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F	F tab
Marcas	30,69	3	10,23	7,90	3,86 S
Carros	38,69	3	12,90	10,00	3,86 S
Resíduo	11,56	9	1,28		
Total	80,94	15			

Agora a hipótese nula é rejeitada tanto para Marcas como para Carros. Ou seja, detecta-se um efeito significativo de Marcas e Carros.

5.3. QUADRADOS LATINOS

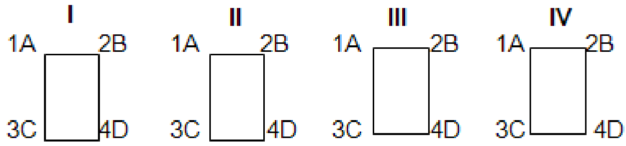
Nesse exemplo, poderia se suspeitar também de um possível efeito da posição sobre o desgaste dos pneus.

Pneus dianteiros e traseiros, e mesmo pneus localizados em lados distintos de um mesmo carro, podem apresentar desgastes diferentes.

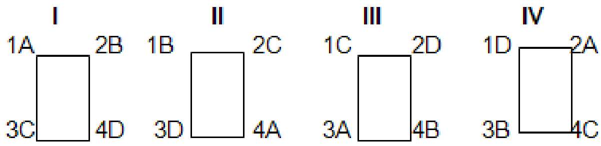
No projeto em blocos aleatorizados as 4 marcas de pneus são distribuídas em um carro sem considerar a posição.

Um projeto onde cada tratamento (Posição) aparece uma e somente uma vez em cada linha (Carro) e em cada coluna (Marca) é chamado de *Quadrado Latino*.

Marca e carro estão blocados mas marca e posição estão confundidos :



Marca e carro estão blocados e também marca e posição:

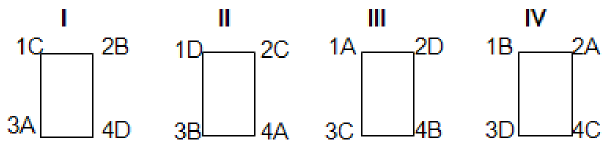


Matriz experimental

	I	**II**	**III**	**IV**
1	**A**	**B**	**C**	**D**
2	**B**	**C**	**D**	**A**
3	**C**	**D**	**A**	**B**
4	**D**	**A**	**B**	**C**

No exemplo anterior:

Desgaste / Posição		Marcas				
	A	B	C	D	T_i	$T_{(k)}$
Carros I	3(17)	2(14)	1(12)	4(13)	56	1 44
II	4(14)	3(14)	2(12)	1(11)	51	2 49
III	1(13)	4(13)	3(11)	2(10)	47	3 51
IV	2(13)	1(8)	4(9)	3(9)	39	4 49
T_j	57	49	44	43	193	193



5.3.1. Modelo estatístico do Quadrado Latino:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{(k)} + \varepsilon_{ij}$$

onde $\gamma_{(k)}$ é acrescentado (ou melhor, é separado do termo de erro experimental). O termo $\gamma_{(k)}$ indica o efeito da posição dos pneus, que antes não podia ser calculado apropriadamente.

As suposições para a análise são:

$$\Sigma\, \gamma_{(k)} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{ij} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

Para esse modelo a decomposição dos resíduos leva as seguintes somas quadradas:

$$SQT = SQC + SQM + SQP + SQR$$

Indicando o número de carros, marcas e posições por "***a***", os respectivos graus de liberdade resultam:

$$(N - 1) = (a - 1) + (a - 1) + (a - 1) + (N - 3a + 2)$$

5.3.2. Teste de Hipóteses

A hipótese principal que queremos testar continua sendo em relação às marcas de pneu. Mas neste projeto também podemos testar se há diferenças entre os carros ou entre as posições.

Conforme mencionado, para fins didáticos, estamos usando as mesmas observações anteriores, redistribuídas ao longo dos carros. Assim, a SQT, a SQM e a SQC continuam as mesmas. Mas é preciso calcular:

$$SQP = (44^2 + 49^2 + 51^2 + 49^2)/4 \; - \; 2328{,}06 = 6{,}69$$

$$SQR = SQT - SQM - SQC - SQP = 80{,}94 - 30{,}69 - 38{,}69 - 6{,}69 = 4{,}87$$

Pode ser observado que a SQR diminuiu de 11,56 para 4,87 porque foi extraído o efeito das posições (6,69). Assim, o projeto com Quadrado Latino reduz ainda mais a variância residual.

5.3.3. Tabela ANOVA para o projeto do Quadrado Latino

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F	F tab
Marcas	30,69	3	10,23	12,4	4,76
Carros	38,69	3	12,90	15,7	4,76
Posição	6,69	3	2,23	2,7	4,76
Resíduo	4,87	6	0,82		
Total	80,94	15			

Novamente a hipótese nula é rejeitada tanto para Marcas como para Carros. A um nível de significância de 5% o efeito da posição não aparece como significativo.

Uma vez que Marca é um efeito significativo, poderíamos completar a análise fazendo uma comparação múltipla de médias. Para esse exemplo, resultaria:

$$S_y = \sqrt{\frac{MQR}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}82}{4}} = 0{,}45$$

$$Ld = 3 \times 0{,}45 = 1{,}36$$

5.3.3.1 Aplicabilidade

Projetos desse tipo só são possíveis quando todos os fatores têm um mesmo número de níveis, ou seja, deve ser um quadrado. Exemplos de quadrados latinos de ordem 4, 5 e 6 são:

4 x 4

A	B	D	C
B	C	A	D
C	D	B	A
D	A	C	B

5 x 5

A	D	B	E	C
D	A	C	B	E
C	B	E	D	A
B	E	A	C	D
E	C	D	A	B

6 x 6

A	D	C	E	B	F
B	A	E	C	F	D
C	E	D	F	A	B
D	C	F	B	E	A
F	B	A	D	C	E
E	F	B	A	D	C

5.3.3.2 Sobre o Quadrado Latino

Observamos que o Quadrado Latino não considera interações entre os fatores. Ele não deve ser usado quando se suspeita de interações significativas. Ele aproveita a interação para estudar um terceiro fator.

Quando se deseja estudar a interação o indicado seria um projeto fatorial cruzado. A vantagem do Quadrado Latino é que se trata de um experimento que exige poucos ensaios, e isso representa economia de tempo e dinheiro.

5.3.4. Outros exemplos do uso de Quadrados Latinos

Seja que desejamos determinar o efeito de 5 fertilizantes diferentes (A, B, C, D, E) sobre o crescimento de um tipo de cereal. E seja que há um terreno que pode ser dividido em uma malha de 5 x 5 porções (Nem o terreno nem as porções precisam ser quadradas).

Nesse caso, um arranjo tipo Quadrado Latino poderia ser utilizado para bloquear o efeito de algum gradiente de umidade ou de fertilidade que possa existir. Esses efeitos poderiam ser virtualmente eliminados usando o projeto que aparece a seguir:

		Colunas				
		1	2	3	4	5
Linhas	I	A	B	C	D	E
	II	C	D	E	A	B
	III	E	A	B	C	D
	IV	B	C	D	E	A
	V	D	E	A	B	C

Outro exemplo pode envolver testes com quatro aditivos para redução da carga poluente em automóveis. Para efetuar o estudo, pode ser necessário usar quatro carros e quatro motoristas, que podem ter algum efeito sobre os resultados.

Assim, para impedir que as diferenças carro-a-carro e motorista-a-motorista terminem inflacionando o erro, podemos usar o Quadrado Latino que aparece a seguir:

Aditivos		Carros			
		1	2	3	4
Moto-rista	I	A	B	D	C
	II	D	C	A	B
	III	B	D	C	A
	IV	C	A	B	D

5.4. QUADRADOS GRECO-LATINOS

Os Quadrados Greco-Latinos são projetos ***a x a*** que permitem analisar quatro fatores cada um deles com "***a***" níveis.

Para obter um quadrado Greco-Latino é preciso superpor dois Quadrados Latinos que sejam ortogonais entre si.

5.4.1. Exemplo

Um engenheiro está medindo o ganho em um processo químico. Os fatores principais são a concentração de ácido (1, 2, 3, 4, 5), a concentração de catalisador (α, β, γ, δ, ε) e o tempo de espera (A, B, C, D, E).

Para efetuar todos os ensaios, é necessário usar 5 lotes de matéria prima (I, II, III, IV, V). O experimento foi rodado seguindo um arranjo do tipo Quadrado Greco Latino e os resultados aparecem a seguir:

		Concentração de Ácido				
		1	2	3	4	5
Lotes	I	Aα=26	Bβ=16	Cγ=19	Dδ=16	Eε=13
	II	Bγ=18	Cδ=21	Dε=18	Eα=11	Aβ=21
	III	Cε=20	Dα=12	Eβ=16	Aγ=25	Bδ=13
	IV	Dβ=15	Eγ=15	Aδ=22	Bε=14	Cα=17
	V	Eδ=10	Aε=24	Bα=17	Cβ=17	Dγ=14

Como pode ser visto, há dois Quadrados Latinos superpostos. Um deles escrito nas letras **A,...,E** e o outro escrito nas letras **α,...,ε**. O resultado é um quadrado Greco-Latino, e será possível avaliar o efeito de todos os fatores listados.

Iniciamos calculando os totais de cada tratamento:

Ácido	Catalisador	Tempo	Lotes
1 = 89	α = 83	A = 118	I = 90
2 = 88	β = 85	B = 78	II = 89
3 = 92	γ = 91	C = 94	III = 86
4 = 83	δ = 82	D = 75	IV = 83
5 = 78	ε = 89	E = 65	V = 82
430	430	430	430

E em seguida as Somas quadradas:

$TC = 430^2 / 25 = 7396$

SQTot = $(\sum y_{ij}^2)$ - TC = 7832 - 7396 = 436,0

SQA = $[(89^2 + ...) / 5]$ - TC = 24,4

SQC = $[(83^2 + ...) / 5]$ - TC = 12,0

$SQ_{Temp} = [(118^2 + ...) / 5]$ - TC = 342,8

SQL = $[(90^2 + ...) / 5]$ - TC = 10,0

SQR = SQTot - SQA - SQC - SQ_{Temp}- SQL= 46,8

De forma que a Tabela ANOVA resulta:

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F	F tab
Ácido	24,4	4	6,1	1,04	3,84
Catalisador	12,0	4	3,0	0,51	3,84
Tempo	342,8	4	85,7	14,65	3,84
Lotes	10,0	4	2,5	0,43	
Resíduo	46,8	8	5,85		
Total	436,0	24			

A um nível de significância de 5% apenas o Tempo de Espera aparece como efeito significativo.

5.5. EXERCÍCIOS:

1. Um engenheiro está conduzindo um experimento a respeito do tempo necessário para o olho humano focar um objeto. Ele está interessado na influência que a distância do objeto possa ter sobre o tempo de foco. Cinco indivíduos estão sendo usados neste experimento. Como pode haver diferenças entre os indivíduos, o experimento foi feito em blocos aleatorizados.

	Indivíduos				
Distância	1	2	3	4	5
4	10	6	6	6	6
6	7	6	6	1	6
8	5	3	3	2	5
10	6	4	4	2	3

Pede-se:

a) Qual o fator principal, qual o fator secundário (blocos) e qual a variável de resposta neste experimento ?

b) Faça a análise de variância e conclua a respeito dos fatores significativos. Use algum gráfico para documentar a análise.

c) Se for o caso, complete a análise fazendo uma comparação múltipla de médias e/ou fazendo a estimativa dos componentes de variação.

2. Um engenheiro industrial está investigando o efeito de quatro métodos de montagem sobre o tempo necessário para montar um componente de TV. Quatro operadores são selecionados para o estudo. Além disso, como a montagem produz fadiga nos operadores, o tempo necessário para montar a última unidade pode ser maior que aquele gasto na montagem da primeira unidade. Para levar em conta essas fontes de variabilidade, o engenheiro usou o quadrado latino que aparece a seguir.

	Tempo Método	Operadores 1	2	3	4	T_i	$T_{(k)}$
	I	C = 10	D = 14	A = 7	B = 8		
Ordem	II	B = 7	C = 18	D = 11	A = 8		
	III	A = 5	B = 10	C = 11	D = 9		
	IV	D = 10	A = 10	B = 12	C = 14		
T_j							

Pede-se:

a) Calcule os totais para cada nível de cada fator e após calcule as somas quadradas.

b) Faça a análise de variância e conclua a respeito dos fatores significativos. Use gráficos para documentar a análise.

c) Se for o caso, complete a análise fazendo uma comparação múltipla de médias e/ou fazendo a estimativa dos componentes de variação.

6. Experimentos Parcionados em Células (Split-Plot)

José Luis Duarte Ribeiro
Carla ten Caten

6.1. INTRODUÇÃO

Algumas vezes, dificuldades técnicas impedem de rodar todo o experimento de uma vez ou em um único equipamento ou com um único lote de matéria-prima:

→ Projetos fatoriais confundidos em bloco

Outras vezes, dificuldades financeiras ou de tempo impedem de rodar o experimento completo:

→ Projetos fatoriais fracionados

Outras vezes, dificuldades impedem a aleatorização completa do experimento dentro do bloco:

→ Projetos parcionados em células

Vejamos um exemplo para ilustrar esse tipo de restrição experimental.

6.1.1. Exemplo

Seja que um engenheiro quer analisar o efeito da composição (traço) e do tempo de cozimento sobre a resistência de tijolos cerâmicos.

Dados sobre a resistência de tijolos cerâmicos

Tempo de Cozimento	Composição dos tijolos			
(min)	C1	C2	C3	C4
T1	X X X	X X X	X X X	X X X
T2	X X X	X X X	X X X	X X X
T3	X X X	X X X	X X X	X X X

Aparentemente, trata-se de um projeto fatorial cruzado 4x3, com repetições, cujo modelo estatístico seria:

$$x_{ijk} = \mu + T_i + C_j + TC_{ij} + \text{erro}$$

Modelo ANOVA com dois fatores a níveis fixos e com três repetições ??

→ isso exige aleatorização completa, ou seja:

Escolher ao acaso uma composição, escolher ao acaso um tempo e colocar ***um*** tijolo no forno. Repetir esse procedimento 36 vezes!!

→ muito pouco prático e econômico

O modo mais prático de rodar esse experimento seria:

Moldar ***todos*** os 9 tijolos da composição 1 de uma só vez. Colocá-los no forno deixando três deles cozinhar por T1 min, três por T2 min e três por T3 min. Depois moldar ***todos*** os tijolos da composição 2 ...

Os quatro níveis de composição (os quatro traços) são chamados de células. Em tal arranjo, composição - um dos fatores principais - está confundido com as células.

Se as condições (ambientais, humanas, etc.) se alterarem de uma célula para outra, essas alterações ficarão confundidas com o efeito da composição.

→ o primeiro caso é muito pouco prático!!

→ o segundo caso é completamente confundido!

Há outras possibilidades ?? ***SIM***

Adotar um compromisso entre praticidade/aleatorização:

Escolher uma composição ao acaso, moldar três tijolos e cozinhar um deles por T1 min, o outro por T2 min e o terceiro por T3 min.

Agora apenas 3 tijolos são colocados no forno, e não 9.

Outra composição é escolhida e mais três tijolos são cozidos por T1, T2 e T3 min. O mesmo procedimento é seguido para as quatro composições e, após, todo o experimento é repetido.

Inclusive, as repetições podem ser rodadas muitos dias após o experimento inicial (com freqüência é vantajoso coletar dados de duas ou três repetições e então decidir se mais repetições são necessárias)

Um experimento conduzido desse modo teria o seguinte arranjo:

Arranjo parcionado em células para o exemplo dos tijolos cerâmicos

Repetição	Tempo de Cozim.	Composição dos tijolos			
		C1	C2	C3	C4
R1	T1	X	X	X	**X**
	T2	X	X	X	**X**
	T3	X	X	X	**X**
R2	T1	X	X	X	X
	T2	X	X	X	X
	T3	X	X	X	X
R3	T1	X	X	X	X
	T2	X	X	X	X
	T3	X	X	X	X

Célula inteira

Parcionamento

Aqui as composições estão parcialmente confundidas com as células, e as partes RxC configuram a célula inteira. Dentro da célula inteira, os tempos de cozimento configuram o parcionamento da célula inteira. É vantajoso colocar no parcionamento o efeito principal de maior interesse, pois não resulta nada confundido. Poderia se pensar que o tempo de cozimento está aninhado nas células, mas este não é o caso, pois os mesmos níveis de tempo de cozimento são usados em todas as células.

O modelo deste experimento seria:

$$x_{ijk} = \mu + \underbrace{R_i + C_j + RC_{ij}}_{\text{Célula inteira}} + \underbrace{T_k + RT_{ik} + CT_{jk} + RTC_{ijk}}_{\text{Célula parcionada}}$$

Neste caso, como não há repetição dentro das células, não há um termo de erro independente.

Para esse exemplo, o valor esperado das médias quadradas resulta:

	Fonte	GDL	3 A i	4 F j	3 F k	1 A m	E(MQ)
Célula inteira	R_i	2	1	4	3	1	$\sigma^2 + 12\sigma^2_R$
	C_j	3	3	0	3	1	$\sigma^2 + 3\sigma^2_{RC} + 9\phi_C$
	RC_{ij}	6	1	0	3	1	$\sigma^2 + 3\sigma^2_{RC}$
Célula parcionada	T_k	2	3	4	0	1	$\sigma^2 + 4\sigma^2_{RT} + 12\phi_T$
	RT_{ik}	4	1	4	0	1	$\sigma^2 + 4\sigma^2_{RT}$
	CT_{jk}	6	3	0	0	1	$\sigma^2 + \sigma^2_{RCT} + 3\phi_{CT}$
	RCT_{ijk}	12	1	0	0	1	$\sigma^2 + \sigma^2_{RCT}$
	$E_{m(ijk)}$	-	1	1	1	1	σ^2 (não dispon.)
Total		35					

Há testes exatos para os fatores principais (C, T) e para a interação entre eles (CT).

Não há testes exatos para R, nem para as suas interações, mas em geral não há interesse nesses efeitos.

A análise de variância resulta como segue:

Fonte	SQ	GDL	MQ	F
R	SQR	2	MQR = SQR/2	(ND)
C	SQC	3	MQC = SQC/3	MQC/MQRC
RC	SQRC	6	MQRC = SQRC/6	(ND)
T	SQT	2	MQT = SQT/2	MQT/MQRT
RT	SQRT	4	MQRT = SQRT/4	(ND)
CT	SQCT	6	MQCT = SQCT/6	MQCT/MQRCT
RCT	SQRCT	12	MQRCT = SQRCT/12	(ND)
Total	SQTotal	35		

Os testes de hipótese são:

- Composição:
  F = MQC/MQRC; e se $F > F_{tab}(3,6)$ rejeita-se Ho

- Tempo de cozimento:
  F = MQT/MQRT; e se $F > F_{tab}(2,4)$ rejeita-se Ho

- Interação:
  F = MQCT/MQRCT;   e se $F > F_{tab}(6,12)$ rejeita-se Ho

Esse exemplo mostra a necessidade de planejar cuidadosamente a forma de coleta dos dados.

6.2. EXPERIMENTOS MULTI-PARCIONADOS EM CÉLULAS *(SPLIT-SPLIT-PLOT)*

Existem projetos onde pode ser necessário mais de um nível de parcionamento. Vejamos um exemplo:

Sejam um experimento sobre o arrancamento de barras de aço mergulhadas em CPs de concreto. Nesse experimento 3 laboratórios, 2 traços de concreto e 4 tipos de barras nervuradas estão envolvidos.

O material para o laboratório 1 (cimento, agregado, areia e barras de aço) é enviado de uma só vez. Isso implica uma restrição sobre a aleatorização completa.

Por sua vez, o Laboratório 1 preparava um traço de concreto e em seguida moldava CPs com os 4 tipos de barras nervuradas. Isso implica outra restrição sobre a aleatorização completa.

Primeiro o laboratório é escolhido, depois o traço é escolhido, e só então as barras nervuradas são aleatorizadas naquele traço e laboratório particular.

Para evitar o confundimento total, três repetições completas desse experimento são realizadas, conforme segue:

Arranjo experimental para o experimento das barras nervuradas:

	Traço ==>	T1				T2			
Repet.	Barras ==> Lab.	B1	B2	B3	B4	B1	B2	B3	B4
R1	L1	X	X	X	X	X	X	X	X
	L2	X	X	X	X	X	X	X	X
	L3	X	X	X	X	X	X	X	X
R2	L1	X	X	X	X	X	X	X	X
	L2	X	X	X	X	X	X	X	X
	L3	X	X	X	X	X	X	X	X
R3	L1	X	X	X	X	X	X	X	X
	L2	X	X	X	X	X	X	X	X
	L3	X	X	X	X	X	X	X	X

Célula Inteira

Célula parcionada

Reparcio-namento

Repetições x Laboratório formam a célula inteira; Dentro de uma repetição, Laboratório x Traço formam a célula parcionada;

Então, a cada combinação Traço-Laboratório-Repetição, as 4 barras de aço são aleatoriamente ensaiadas, formando o que é chamado de células reparcionadas.

A existência do reparcionamento indica que mais de um efeito principal está confundido (no caso Laboratório e Traço apresentam diferentes graus de confundimento).

Valores esperados para as médias quadradas:

	Fonte	GDL	3 A i	3 F j	2 F k	4 F l	1 A m	E(MQ)
Célula inteira	R_i	2	1	3	2	4	1	$\sigma^2 + 24\sigma^2_R$
	L_j	2	3	0	2	4	1	$\sigma^2 + 8\sigma^2_{RL} + 24\phi_L$
	RL_{ij}	4	1	0	2	4	1	$\sigma^2 + 8\sigma^2_{RL}$
Célula parcionada	T_k	1	3	3	0	4	1	$\sigma^2 + 12\sigma^2_{RT} + 36\phi_T$
	RT_{ik}	2	1	3	0	4	1	$\sigma^2 + 12\sigma^2_{RT}$
	LT_{jk}	2	3	0	0	4	1	$\sigma^2 + 4\sigma^2_{RLT} + 12\phi_{LT}$
	RLT_{ijk}	4	1	0	0	4	1	$\sigma^2 + 4\sigma^2_{RLT}$
Célula reparcionada	B_l	3	3	3	2	0	1	$\sigma^2 + 6\sigma^2_{RB} + 18\phi_B$
	RB_{il}	6	1	3	2	0	1	$\sigma^2 + 6\sigma^2_{RB}$
	LB_{jl}	6	3	0	2	0	1	$\sigma^2 + 2\sigma^2_{RLB} + 6\phi_{LB}$
	RLB_{ijl}	12	1	0	2	0	1	$\sigma^2 + 2\sigma^2_{RLB}$
	TB_{kl}	3	3	3	0	0	1	$\sigma^2 + 3\sigma^2_{RTB} + 9\phi_{TB}$
	RTB_{ikl}	6	1	3	0	0	1	$\sigma^2 + 3\sigma^2_{RTB}$
	LTB_{jkl}	6	3	0	0	0	1	$\sigma^2 + \sigma^2_{RLTB} + 3\phi_{LTB}$
	$RLTB_{ijk}$	12	1	0	0	0	1	$\sigma^2 + \sigma^2_{RLTB}$
	l $E_{m(ijkl)}$	0	1	1	1	1	1	σ^2 (não dispon.)
Total		35						

A coluna E(MQ) indica que testes F podem ser feitos para todos os efeitos de interesse e suas interações.

Não há testes F para o efeito das repetições e para as suas interações, mas em geral esses efeitos não são de interesse.

O exame da coluna E(MQ) indica que alguns testes F serão feitos com poucos GDL no denominador.

Uma alternativa seria aumentar o número de repetições. Nesse exemplo, se 5 repetições fossem realizadas, já teríamos 8 GDL para RL (erro da célula inteira) e para RLT (erro da célula parcionada).

Outra alternativa é aglutinar Somas Quadradas:

R + RL	→	erro para a célula inteira
RT + RLT	→	erro para a célula parcionada
RB + RLB + RTB + RLTB	→	erro para o reparcionamento

Outra técnica conveniente é realizar duas ou três repetições, computar os resultados e verificar se a significância foi obtida ou se os valores de F são grandes, mesmo que não significativos.

Então, conforme os resultados, adicionar outras repetições, aumentando a precisão e o custo do experimento, na esperança de detectar efeitos significativos.

6.3. EXERCÍCIOS

6.1 Esse exemplo reforça a idéia que, no meio industrial, muitas vezes é mais prático e eficiente rodar experimentos parcionados em células. O objetivo do experimento descrito a seguir era melhorar a **resistência à corrosão** de barras de aço, aplicando um filme de revestimento curado em um forno industrial. Quatro tipos diferentes de revestimento (C1, C2, C3 e C4) foram testados usando-se três temperaturas diferentes: 360, 370 e 380^{o}C.

O arranjo experimental foi o seguinte: o forno era ajustado em uma determinada temperatura; em seguida 4 barras eram colocadas no forno, cada uma delas pintada com um tipo diferente de revestimento. As barras eram deixadas curar por um tempo fixo e, depois, uma nova temperatura era ajustada, e assim por diante. A ordem dos ensaios e os resultados aparecem a seguir:

Repetição		Temperatura		Coating (Revestimento)	
R1	T1 = 360	C2 = 73	C3 = 83	C1 = 67	C4 = 89
	T2 = 370	C1 = 65	C3 = 87	C4 = 86	C2 = 91
	T3 = 380	C3 = 147	C1 = 155	C2 = 127	C4 = 212
R2	T3 = 380	C4 = 153	C3 = 90	C2 = 100	C1 = 108
	T2 = 370	C4 = 150	C1 = 140	C3 = 121	C2 = 142
	T1 = 360	C1 = 33	C4 = 54	C2 = 08	C3 = 46

Analise os resultados, identifique os efeitos significativos e conclua a respeito do melhor ajuste para o processo

7. Experimentos com Fatores a Níveis Aleatórios

José Luis Duarte Ribeiro
Carla ten Caten

Na seção anterior analisamos projetos com fatores a níveis fixos. Nessa seção vamos analisar duas outras situações:

- Projetos com fatores a níveis aleatórios
- Projetos mistos

7.1. O MODELO PARA FATORES A NÍVEIS ALEATÓRIOS

Considere o caso de um projeto com dois fatores onde os níveis de A e B são aleatórios.

Por exemplo, A pode ser MÁQUINAS, escolhidas aleatoria-mente de um conjunto; enquanto B pode ser OPERADORES, também escolhidos aleatoriamente.

O mesmo modelo linear é usado para representar as observações:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{k(ij)}$$

A variância de cada observação é:

$$Var(Y_{ijk}) = \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\tau\beta}^2 + \sigma^2$$

onde σ_τ^2 , σ_β^2 , $\sigma_{\tau\beta}^2$, σ^2..são os chamados componentes de variância. Estamos interessados em testar as hipóteses:

H_0: $\sigma_\tau^2 = 0$	H_0: $\sigma_\beta^2 = 0$	H_0: $\sigma_{\tau\beta}^2 .= 0$
H_1: $\sigma_\tau^2 \neq 0$	H_1: $\sigma_\beta^2 \neq 0$	H_1: $\sigma_{\tau\beta}^2 . \neq 0$

Todos os cálculos de Somas Quadradas e Médias Quadradas permanecem idênticos àqueles apresentados para o modelo com fatores a níveis fixos.

Mas, para definir o teste F, precisamos analisar o valor espera-do das Médias Quadradas - E(MQ). Pode ser demonstrado que esses valores esperados valem:

$$E(MQA) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + bn\sigma_{\tau}^2$$

$$E(MQB) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + an\sigma_{\beta}^2$$

$$E(MQAB) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2$$

e

$$E(MQR) = \sigma^2$$

A partir dos E(MQ), observamos que a estatística apropriada para testar a hipótese: H_0: $\sigma_{\tau}^2 = 0$ é:

$$F_A = MQA / MQAB$$

Se a hipótese H0 for verdadeira, esse quociente deve resultar próximo de 1. Da mesma forma, para testar a hipótese: H_0: $\sigma_{\beta}^2 = 0$ a estatística apropriada é:

$$F_B = MQB / MQAB$$

E para testar a interação, usamos:

$$F_{AB} = MQAB / MQR$$

Como pode ser visto, os testes F não são os mesmos definidos para o modelo com níveis fixos (onde todos os testes mantinham MQR no denominador)

7.1.1. Exemplo

Uma siderúrgica possui diversos fornos. Foi rodado um experimento escolhendo-se aleatoriamente três fornos e quatro lotes de matéria prima. A resposta medida foi a tenacidade da liga metálica obtida. Faça o teste F, conclua a respeito dos fatores significativos e estime os componentes de variação.

Fonte de Variação	SQ	GDL	MQ	***Teste F***	
Fornos	15460	2	7730	***9,2***	***Sig.***
Material	4539	3	1513	***1,8***	***N.Sig.***
Interação	5040	6	840	***4,1***	***Sig.***
Erro	4920	24	205		
Total	29959	35			

O fator A e a interação AB aparecem como significativos. Como é um experimento com fatores a níveis aleatórios, os testes foram feitos usando:

$F_A = MQA / MQAB$

$F_B = MQB / MQAB$

$F_{AB} = MQAB / MQR$

Os componentes de variação podem ser calculados a partir das fórmulas definidas para os E(MQ). Isolando cada termo, resulta:

$$\sigma^2 = MQR = 205{,}0$$

$$\sigma^2_{\tau\beta} = \frac{MQAB - MQR}{n} = \frac{840 - 205}{3} = 211{,}7$$

$$\sigma^2_{\beta} = \frac{MQB - MQAB}{an} = \frac{1513 - 840}{3 \times 3} = 74{,}7$$

$$\sigma^2_{\tau} = \frac{MQA - MQAB}{bn} = \frac{7730 - 840}{4 \times 3} = 574{,}2$$

7.1.2. O modelo misto

Seja a situação em que A é um fator a níveis fixos, enquanto que os níveis de B são aleatórios. Esse é o chamado modelo misto.

Nesse caso, temos o mesmo modelo linear apresentado anteriormente, isto é:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{k(ij)}$$

E as Somas Quadradas e Médias Quadradas também são calculadas da mesma forma. Contudo, o valor esperado das médias quadradas se altera:

$E(MQA) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + bn\phi_A$

$E(MQB) = \sigma^2 + an\sigma_{\beta}^2$

$E(MQAB) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2$

$E(MQR) = \sigma^2$

Onde:

$$\phi_A = \frac{\sum \tau_i^2}{(a-1)}$$

não é exatamente uma variância, uma vez que o efeito dos níveis do fator A é suposto fixo; no entanto, esse termo tem a mesma unidade de uma variância

Nesse caso, os testes F apropriados são:

$F_A = MQA / MQAB$

F_B = MQB / MQR

F_{AB} = MQAB / MQR

E as estimativas dos componentes de variância é feita usando:

$$\sigma^2 = MQR$$

$$\sigma^2_{\tau\beta} = \frac{MQAB - MQR}{n}$$

$$\sigma^2_{\beta} = \frac{MQB - MQR}{an}$$

A Tabela a seguir apresenta o valor esperado das médias quadradas para os vários modelos vistos até aqui:

Efeito	A, B Fixos	A, B Aleatórios	A fixo, B aleat.
E(MQA)	$\sigma^2 + bn\phi_A$	$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + bn\sigma_\tau^2$	$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + bn\phi_A$
E(MQB)	$\sigma^2 + an\phi_B$	$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + an\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + an\sigma_\beta^2$
E(MQAB)	$\sigma^2 + n\phi_{AB}$	$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2$	$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2$
E(MQR)	σ^2	σ^2	σ^2

E, portanto, o teste F a ser feito em cada caso é:

Efeito	A, B Fixos	A, B Aleatórios	A fixo, B aleat.
F_A	MQA/MQR	MQA/MQAB	MQA/MQAB
F_B	MQB/MQR	MQB/MQAB	MQB/MQR
F_{AB}	MQAB/MQR	MQAB/MQR	MQAB/MQR

As tabelas anteriores apresentam a solução para experimentos com dois fatores cruzados.

Contudo, é preciso um procedimento geral que forneça o E(MQ) para experimentos de K fatores, onde inclusive, possa haver fatores aninhados.

Esse procedimento será visto a seguir.

Enfatizamos que conhecer o valor das médias quadradas é importante por dois motivos:

- Para a estimativa dos componentes de variação
- Para a definição dos testes F

7.1.3. Procedimento para determinar o E(MQ)

1. Escreva os termos variáveis do modelo no cabeçalho das linhas de uma tabela em duas direções

τ_i

β_j
$\tau\beta_{ij}$
$\varepsilon_{k(ij)}$

2. Escreva os subscritos do modelo no cabeçalho das colunas. Acima desses adicione F ou A, conforme os níveis do fator sejam fixos ou aleatórios. Ainda, adicione o número de observações que cada subscrito cobre.

	a	b	n
	F	A	A
	i	j	k
τ_i			
β_j			
$\tau\beta_{ij}$			
$\varepsilon_{k(ij)}$			

3. Para cada linha (cada termo do modelo), copie o número de observações abaixo de cada subscrito, desde que o subscrito não apareça no cabeçalho das linhas.

	a	b	n
	F	A	A
	i	j	k
τ_i		b	n
β_j	a		n
$\tau\beta_{ij}$			n
$\varepsilon_{k(ij)}$			

4. Coloque 1 nas posições em que o subscrito da coluna coincide com um subscrito que está entre parênteses no cabeçalho da linha.

	a	b	n
	F	A	A
	i	j	k
τ_i		b	n
β_j	a		n
$\tau\beta_{ij}$			n
$\varepsilon_{k(ij)}$	1	1	

5. Complete o restante com 0 ou 1; use 0 nas colunas dos fatores a níveis fixos; use 1 nas colunas dos fatores a níveis aleatórios.

	a	b	n
	F	A	A
	i	j	k
τ_i	0	b	n
β_j	a	1	n
$\tau\beta_{ij}$	0	1	n
$\varepsilon_{k(ij)}$	1	1	1

6. Para obter o E(MQ) para um componente qualquer do modelo, faça o seguinte:

a) cubra as colunas que contém subscritos não entre parêntesis correspondentes ao respectivo termo do modelo (por exemplo, para a média quadrada de A, que está associada o subscrito i, cubra a coluna i)

b) Multiplique os termos restantes em cada linha. Cada um desses produtos é o coeficiente para o termo respectivo do modelo, desde que o subscrito sob o termo cubra também o(s) subscrito(s) do componente que está sendo avaliado.

c) A soma desses coeficientes, multiplicados pela variância do termo correspondente (σ^2 , $\sigma_{\tau\beta}^2$, ϕ_A , etc.) é o valor esperado da média quadrada para o componente considerado.

Por exemplo, para MQA, cubra a coluna i e o produto dos termos restantes é $1\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + \cancel{n\sigma_\beta^2} + bn\phi_A$, contudo, o termo $n\sigma_\beta^2$ é ignorado, pois ele não cobre o subscrito i.

Os resultados do uso deste procedimento fornecem os E(MQ) que aparecem a seguir:

	a F i	b A j	n A k	
τ_i	0	b	n	$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + bn\phi_A$
β_j	a	1	n	$\sigma^2 + an\sigma_\beta^2$
$\tau\beta_{ij}$	0	1	n	$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2$
$\varepsilon_{k(ij)}$	1	1	1	σ^2

7. Para projetos com fatores aninhados, os níveis do fator que está aninhado seguem entre parênteses, e usa-se a regra 4 descrita acima

7.1.4. Exemplo:

Seja um experimento fatorial de três fatores, A, B e C, ensaiados a ***a***, ***b*** e ***c*** níveis, respectivamente. E seja que ***n*** observações por parcela são coletadas.

Assumindo que todos os fatores sejam a níveis aleatórios, os E(MQ) resultam conforme a Tabela a seguir:

	a A i	b A j	c A k	n A l	
τ_i	1	b	c	n	$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta\gamma}^2 + nc\sigma_{\tau\beta}^2 + nb\sigma_{\tau\gamma}^2 + nbc\sigma_\tau^2$
β_j	a	1	c	n	$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta\gamma}^2 + nc\sigma_{\tau\beta}^2 + na\sigma_{\beta\gamma}^2 + nac\sigma_\beta^2$
γ_k	a	b	1	n	$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta\gamma}^2 + nb\sigma_{\tau\gamma}^2 + na\sigma_{\beta\gamma}^2 + nab\sigma_\gamma^2$
$\tau\beta_{ij}$	1	1	c	n	$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta\gamma}^2 + nc\sigma_{\tau\beta}^2$
$\tau\gamma_{ik}$	1	b	1	n	$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta\gamma}^2 + nb\sigma_{\tau\gamma}^2$
$\beta\gamma_{jk}$	a	1	1	n	$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta\gamma}^2 + na\sigma_{\beta\gamma}^2$
$\tau\beta\gamma_{ijk}$	1	1	1	n	$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta\gamma}^2$
$\varepsilon_{l(ijk)}$	1	1	1	1	σ^2

A análise dessa Tabela revela que não há testes exatos para os fatores principais A, B e C. Ou seja, se desejamos testar a hipótese $\sigma_\tau^2 = 0$, não encontramos o denominador apropriado. O mesmo acontece em relação aos fatores B e C.

7.1.5. Testes F aproximados

Vamos indicar duas alternativas para resolver esse problema:

1. Nesse exemplo existem testes exatos para as interações de dois e três fatores. No caso das interações de dois fatores resultarem não significativas, elas podem ser igualadas a zero e, então, podemos formar os testes para os fatores principais.

Por exemplo, se as interações AB e AC não forem significa-tivas, o efeito do fator A pode ser testado usando F = MQA / MQABC

2. Se as interações não forem insignificantes, então uma alternativa é criar uma combinação linear de Médias Quadradas que forneçam o denominador desejado.

Por exemplo, para testar o Fator A, podemos usar

MQ* = MQAB + MQAC - MQABC

Cujo valor esperado resulta:

$$\sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta\gamma}^2 + nc\sigma_{\tau\beta}^2 + nb\sigma_{\tau\gamma}^2$$

Os graus de liberdade da MQ* são calculados usando:

$$\mathrm{GDL}^* = \frac{(MQ^*)^2}{\sum a_i^2 \times MQ_i^2 / \nu_i}$$

onde a_i são os coeficientes usados na construção da combi-nação linear, e MQ_i e ν_i são as respectivas médias quadra-das e seus graus de liberdade

7.1.6. Exemplo

Reanalizar o experimento dos volumes de refrigerantes, supondo que todos os fatores fossem a níveis aleatórios.

	Pressão			
	25 Psi		30 Psi	
% de	Velocidade		Velocidade	
Carbonatação	100	120	100	120
10	x x	x x	x x	x x
12	x x	x x	x x	x x
14	x x	x x	x x	x x

Sendo os fatores a níveis aleatórios, o E(MQ) resulta:

	3 A i	2 A j	2 A k	2 A l	
τ_i	1	2	2	2	$\sigma^2 + 2\sigma_{\tau\beta\gamma}^2 + 4\sigma_{\tau\beta}^2 + 4\sigma_{\tau\gamma}^2 + 8\sigma_{\tau}^2$
β_j	3	1	2	2	$\sigma^2 + 2\sigma_{\tau\beta\gamma}^2 + 4\sigma_{\tau\beta}^2 + 6\sigma_{\beta\gamma}^2 + 12\sigma_{\beta}^2$
γ_k	3	2	1	2	$\sigma^2 + 2\sigma_{\tau\beta\gamma}^2 + 4\sigma_{\tau\gamma}^2 + 6\sigma_{\beta\gamma}^2 + 12\sigma_{\gamma}^2$
$\tau\beta_{ij}$	1	1	2	2	$\sigma^2 + 2\sigma_{\tau\beta\gamma}^2 + 4\sigma_{\tau\beta}^2$
$\tau\gamma_{ik}$	1	2	1	2	$\sigma^2 + 2\sigma_{\tau\beta\gamma}^2 + 4\sigma_{\tau\gamma}^2$
$\beta\gamma_{jk}$	3	1	1	2	$\sigma^2 + 2\sigma_{\tau\beta\gamma}^2 + 6\sigma_{\beta\gamma}^2$
$\tau\beta\gamma_{ijk}$	1	1	1	2	$\sigma^2 + 2\sigma_{\tau\beta\gamma}^2$
$\varepsilon_{l(ijk)}$	1	1	1	1	σ^2

Os cálculos das Somas Quadradas e Médias Quadradas são os mesmos, só se altera o teste F:

Fonte	SQ	GDL	MQ	Teste F
A: % Carb.	252,75	2	126,38	Não dispon.
B: Pressão	45,38	1	45,38	Não dispon.
C: Veloc.	22,04	1	22,04	Não dispon.
AB	5,25	2	2,63	MQAB/MQABC
AC	0,58	2	0,29	MQAC/MQABC
BC	1,04	1	1,04	MQBC/MQABC
ABC	1,08	2	0,54	MQABC/MQR
Erro	8,50	12	0,71	
Total	336,63	23		

Para ilustrar, o teste do fator A será feito contra uma combinação linear de médias quadradas, no caso:

MQ* = MQAB + MQAC - MQABC

MQ* = 2,63 + 0,29 - 0,54 = 2,38

$$\text{GDL}^* = \frac{2{,}38^2}{(2{,}63^2/2)+(0{,}29^2/2)+(0{,}54^2/2)} = 1{,}55$$

$$F_{A=}\ \frac{MQA}{MQ^*} = \frac{126{,}38}{1{,}55} = 81{,}53 > F_{tab} \quad F_{0,05}(2;\ 3{,}13) \cong 9$$

7.1.7. Exemplo com fatores aninhados

Um engenheiro está estudando a montagem de um componente eletrônico. Ele projetou três acessórios de montagem e dois layouts de trabalho.

Para realizar a montagem, foram escolhidos aleatoriamente 4 operadores para trabalhar com o layout 1 e outros 4 operadores (diferentes) para trabalhar com o layout 2.

De modo que operadores estão aninhados nos níveis de layout. Isso foi necessário, pois na verdade os layouts 1 e 2 ficam em plantas diferentes.

Tempos de montagem coletados:

	Layout 1				Layout 2				
Operad. →	1	2	3	4	1	2	3	4	Ti...
Acessório 1	22 24	23 24	28 29	25 23	26 28	27 25	28 25	24 23	404
Acessório 2	30 27	29 28	30 32	27 25	29 28	30 27	24 23	28 30	447
Acessório 3	25 21	24 22	27 25	26 23	27 25	26 24	24 27	28 27	401
Totais T.jk.	149	150	171	149	163	159	151	160	
Totais T.j..	619				633				1252

Observa-se que Operadores estão aninhados dentro dos níveis de Layout, enquanto que Layout e Acessórios estão cruzados. O modelo estatístico desse experimento é:

$$Y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{k(j)} + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik(j)} + \varepsilon_{l(ijk)}$$

onde: τ_i representa o efeito de Acessórios, a níveis fixos;

β_j representa o efeito de Layouts, a níveis fixos

$\gamma_{k(j)}$ representa o efeito dos Operadores, aninhado em Layout, a níveis aleatórios;

A Tabela a seguir apresenta as quantidades que devem ser agrupadas para a análise do Projeto aninhado:

Projeto Cruzado SQ	GDL	Projeto Cruzado-Aninhado SQ	GDL
SQA	2	SQA	2
SQB	1	SQB	1
SQAB	2	SQAB	2
SQC	3	SQC(B) = SQC + SQBC	6
SQBC	3		
SQAC	6	SQAC(B) = SQAC + SQABC	12
SQABC	6		
SQR	24	SQR	24
SQT	47	SQT	47

E os E(MQ) resultam (usando o procedimento):

	3 F i	2 F j	2 4 k	2 A l	
τ_i	0	2	4	2	$\sigma^2 + 2\sigma_{\tau\gamma}^2 + 16\phi_A$
β_j	3	0	4	2	$\sigma^2 + 6\sigma_{\gamma}^2 + 24\phi_B$
$\gamma_{k(j)}$	3	1	1	2	$\sigma^2 + 6\sigma_{\gamma}^2$
$\tau\beta_{ij}$	0	0	4	2	$\sigma^2 + 2\sigma_{\tau\gamma}^2 + 8\phi_{AB}$
$\tau\gamma_{ik(j)}$	0	1	1	2	$\sigma^2 + 2\sigma_{\tau\gamma}^2$
$\varepsilon_{l(ijk)}$	1	1	1	1	σ^2

Por fim, a análise de variância resulta:

Fonte	SQ	GDL	MQ	F
Acessórios A	82,80	2	41,40	MQA/MQAC(B) = 7,54 *
Layouts B	4,08	1	4,08	MQB/MQC(B) = 0,34
Operad. C(B)	71,91	6	11,99	MQC(B)/MQR = 5,15 *
AB	19,04	2	9,52	MQAB/MQAC(B) = 1,73
AC(B)	65,84	12	5,49	MQAC(B)/MQR = 2,36 *
Erro	56,00	24	2,33	
Total	299,67	47		

A um nível de significância de 5% conclui-se que Acessórios, Operadores e a interação AC são efeitos significativos.

7.2. EXERCÍCIO

5.1 Está sendo realizado um estudo para identificar as causas de trincas que surgem na base de tubos de imagem. Para esse estudo, foram fixados três desenhos de base, três temperaturas de Montagem e foram escolhidos aleatoriamente dois operadores para executar a montagem. Os dados que aparecem a seguir representam a força necessária para provocar a primeira trinca.

	Operador 1			Operador 2		
Desenho da base	Temperatura 100	125	150	Temperatura 100	125	150
1	58 57	84 86	93 96	61 57	82 87	99 101
2	55 53	88 83	94 91	61 55	85 89	95 103
3	54 58	84 91	91 95	57 53	83 88	105 98

Pede-se:

1. Qual a variável de resposta ?

2. Quais os fatores controláveis ? Fixos ou aleatórios ? Quantos níveis ?

3. Escreva as fórmulas dos valores esperados das médias quadradas para esse exemplo.

4. Quais os efeitos significativos ?

5. Faça os gráficos pertinentes para auxiliar na análise.

6. Baseado nos resultados, quais as recomendações que você faria para melhorar o processo ?

5.2 Um engenheiro está estudando a excentricidade presente em um tipo de peça usinada. Para esse estudo, foram fixadas três máquinas (A1, A2 e A3) que podem trabalhar em duas velocidades (B1 = 10 partes/min. ou B2 = 15 partes/min.) e foram escolhidos aleatoriamente 3 operadores para participar do experimento (C1, C2, C3). Os dados que aparecem a seguir representam os valores medidos de excentricidade (menor-é-melhor).

Velocidade	B1			B2		
Operador: Máquina	C1	C2	C3	C1	C2	C3
A1	32 34	33 31	45 46	33 35	33 36	47 46
A2	35 37	37 35	41 44	36 38	40 37	44 46
A3	30 32	28 29	40 42	30 31	32 29	42 45

Pede-se:

1. Qual a variável de resposta ?

2. Quais os fatores controláveis ? Fixos ou aleatórios ? Quantos níveis ?

3. Escreva as fórmulas dos valores esperados das médias quadradas para esse exemplo.

4. Quais os efeitos significativos ?

5. Faça os gráficos pertinentes para auxiliar na análise.

6. Baseado nos resultados, quais as recomendações que você faria para melhorar o processo

8. Projetos Fatoriais do Tipo 2^K

José Luis Duarte Ribeiro
Carla ten Caten

Os projetos fatoriais 2^K contemplam K Fatores, cada um deles a apenas dois níveis: alto ou baixo.

O níveis podem ser:

Quantitativos: dois valores de resistência,

dois tempos de cozimento,

duas concentrações de reagentes, etc.

Qualitativos: dois "*layouts*",

duas máquinas de corte,

a presença ou ausência de um componente, etc.

Esse projeto é chamado 2^K porque para rodá-lo (uma repetição completa) são necessárias:

$$\boxed{\mathbf{N = 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 \;=\; 2^K} \textbf{ observações}}$$

8.1.1. Suposições:

Os fatores são a níveis fixos,

Os projetos são completamente aleatorizados e as hipóteses de normalidade são satisfeitas.

8.1.2. Vantagens dos projetos 2^k

Simples de serem analisados
Especialmente úteis nos estágios iniciais de pesquisa
Quando há muitos fatores a serem investigados
Onde outros projetos seriam inviáveis

8.2. PROJETOS 2^2

Esse é o mais simples dos projetos 2^k.

Vejamos um exemplo:

	Baixo	Alto
Fator A: % de Cimento	15%	20%
Fator B: Aditivo	Ausente	Presente

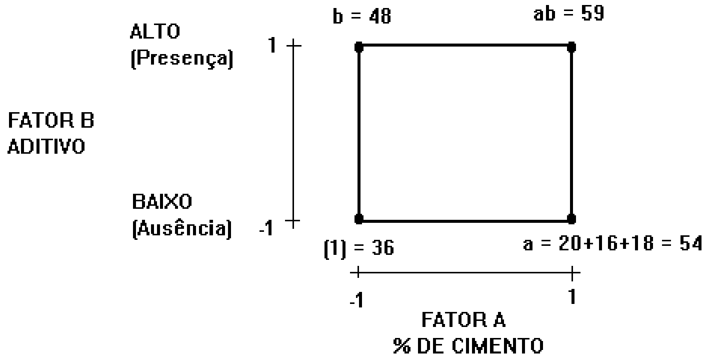
Dados para o projeto fatorial 2^2

Tratamento	Repetições I	II	III	Total
A baixo, B baixo	11	14	11	36
A alto, B baixo	20	16	18	54
A baixo, B alto	15	19	14	48
A alto, B alto	19	18	22	59

Totais Y

	Abaixo	Aalto
Balto	48	59
Bbaixo	36	54

8.2.1. Tratamentos e totais:



Letras minúsculas = ***Tratamentos***

Letras maiúsculas = ***Efeitos***

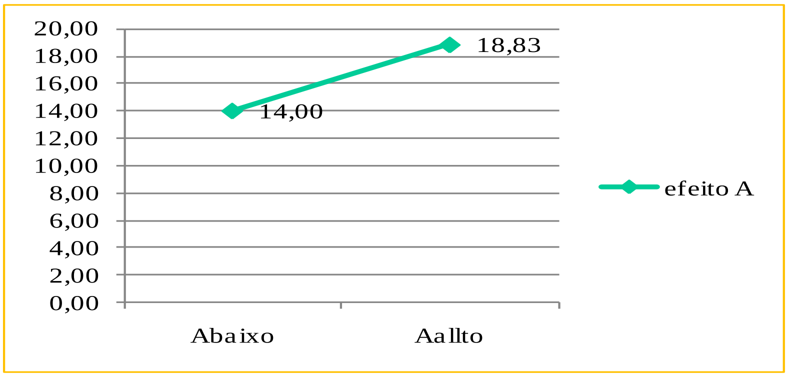
O tratamento recebe a letra do fator que estiver no nível alto.

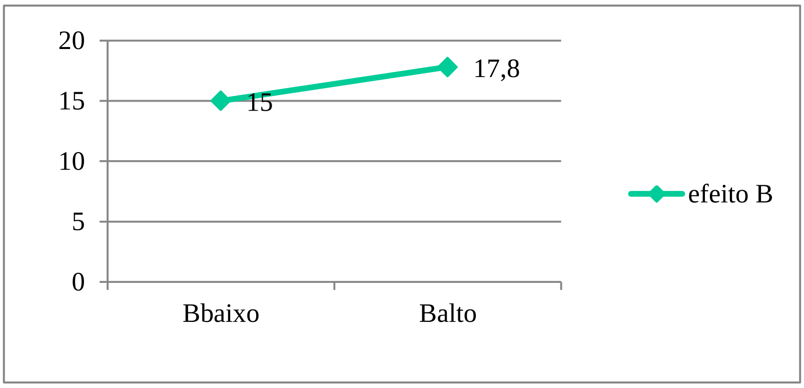
8.2.2. Cálculo dos efeitos

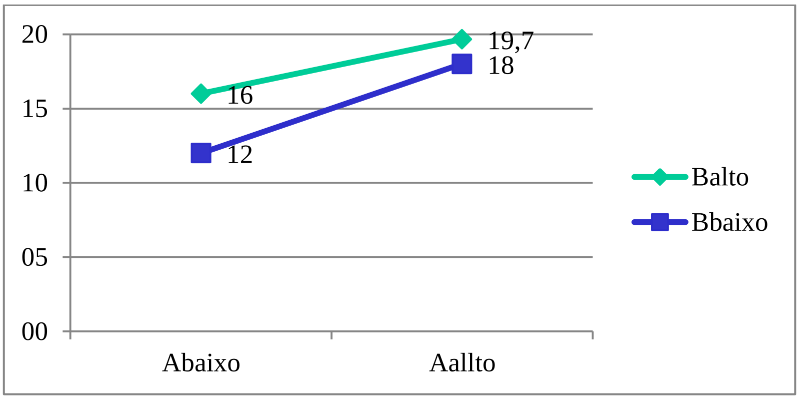
O efeito do fator é calculado com a diferença entre a média da variável de resposta no nível alto menos a média da variável de resposta no nível baixo

Médias

	Abaixo	Aalto	Média B	Efeito B
Balto	16,0	19,7	**17,8**	**2,83**
Bbaixo	12,0	18,0	**15,0**	
Média A	**14,00**	**18,83**		
Efeito A	**4,83**			







O efeito também pode ser calculado como:

A = [(ab + a) - (b + (1))] / (2^{K-1} x n)

B = [(ab + b) - (a + (1))] / (2^{K-1} x n)

AB = [(ab + (1)) - (a + b)] / (2^{K-1} x n)

As letras minúsculas **(1)**, **a**, **b**, **ab** representam o total de todas as "**n**" repetições obtido para o correspondente tratamento.

Para esse exemplo de resistência da argamassa, os efeitos médios resultam:

A = [59 + 54 - 48 – 36] / (2 x 3) = 4,83

B = [59 +48 - 54 – 36] / (2 x 3) = 2,83

AB = [59 + 36 - 54 – 48] / (2 x 3) = -1,16

Nas fórmulas dos efeitos, as expressões entre colchetes são chamadas de "CONTRASTES":

$\text{Contraste}_A = C_A = ab + a - b - (1)$

$\text{Contraste}_B = C_B = ab + b - a - (1)$

$\text{Contraste}_{AB} = C_{AB} = ab + (1) - a - b$

E os efeitos são:

$$Efeito = \frac{(Contraste)}{2^{k-1} \times n}$$

Os contrastes são ortogonais:

As somas dos sinais coef. de **ab**, **a**, **b** e **(1)** é igual a zero.

A soma dos produtos dos sinais dos coef. (C_A **.** C_B , etc.) é igual a zero.

Tratamento	A	B	AB	Totais Y
1	-1	-1	1	36
a	1	-1	-1	54
b	-1	1	-1	48
ab	1	1	1	59
Contraste	29	17	-7	
Efeito	4,83	2,83	-1,17	
SQ	70,08	24,08	4,08	

8.2.3. Cálculo das somas quadradas

Podem ser obtidas a partir dos contrastes:

$$SQ = \frac{(Contraste)^2}{2^k \times n}$$

SQA = $[ab + a - b - (1)]^2 / (2^K \text{ x } n)$

= $(59 + 54 - 48 - 36)^2 / 12 = 70{,}08$

SQB = $[ab + b - a - (1)]^2 / (2^K \text{ x } n)$

= $(59 + 48 - 54 - 36)^2 / 12 = 24{,}08$

SQAB = $[ab + (1) - a - b)^2 / (2^K \text{ x } n)$

= $(59 + 36 - 54 - 48)^2 / 12 = 4{,}08$

A soma dos quadrados totais é encontrada na maneira usual:

$$SQT = \left(\sum_{i\,j\,k} x_{i\,j\,k}^2\right) - \frac{T^2 \ldots}{N} = 11^2 + \cdots + 18^2 + 22^2 - \frac{197^2}{12} = 134{,}92$$

Assim como a soma quadrada dos resíduos (por subtração):

SQR = SQT - SQA - SQB - SQAB

= 134,92 - 70,08 - 24,08 - 4,08 = 36,68

8.2.4. Tabela Anova:

Fonte	SQ	GDL	MQ	F	Ftab
A	70,08	1	70,08	15,28	5,32
B	24,08	1	24,08	5,25	5,32
AB	4,08	1	4,08	0,90	5,32
Resíduos	36,68	8	4,59		
Total	134,92	11			

→O fator A é significativo, O fator B é quase significativo.

8.2.5. Verificação:

Os mesmos resultados seriam obtidos usando o formulário convencional de projetos fatoriais.

		FATOR A		
		-1	+1	
FATOR B	-1	36	54	90
	+1	48	59	107
		84	113	197

TC = $197^2/12$

SQA = [(842 + 1132) / 6] - (1972 / 12) = 70,08

SQB = [(902 + 1072) / 6] - (1972 / 12) = 24,08

SQAB = [(362 + 542 + 482 + 592) / 3] -

- 70,08 - 24,08 - (1972 / 12) = 4,08

SQT e SQR calculados como acima.

8.2.6. Ordem padrão das combinações de tratamento:

(1) a b ab

Tabela de sinais para o cálculo dos efeitos em um projeto 2^2.

	Efeito fatorial			
Tratamentos	I	A	B	AB
(1)	+	-	-	+
a	+	+	-	-
b	+	-	+	-
ab	+	+	+	+

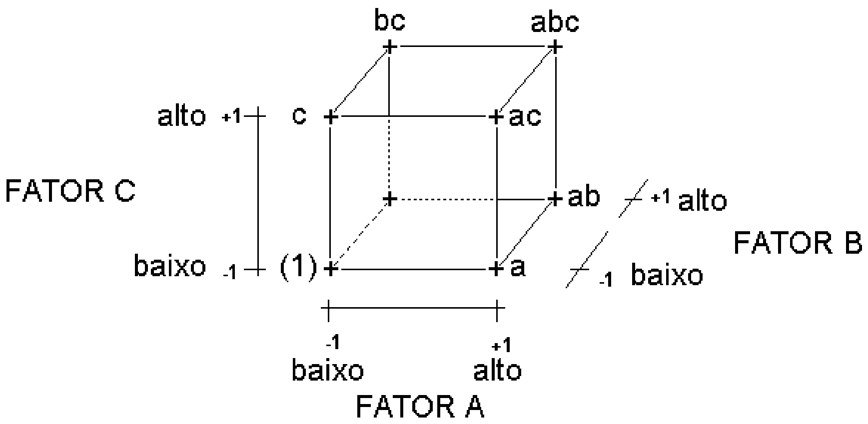
Obs. Os sinais para o contraste de AB são obtidos a partir do produto dos sinais das colunas de A e B.

8.3. PROJETOS 2^3

Três fatores, cada um deles a dois níveis. Assim há oito tratamentos. Na ordem padrão:

(1) a b ab c ac bc abc

Graficamente podemos representá-las como um cubo:



Efeitos principais:

A = DIREITA - ESQUERDA

A = [a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc] / (2^{k-1} x n)

B = POSTERIOR - FRONTAL

B = [b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac] / 4n

C = TOPO - BASE

C = [c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab] / 4n

Interações: a partir da comparação das diagonais:

AB = [ab - b - a + (1) + abc - bc - ac + c] / (2^{k-1} x n)

AC = [ac - a - c + (1) + abc - ab - bc + b] / 4n

BC = [bc - b - c + (1) + abc - ab - ac + a] / 4n

ABC = [(abc - bc) - (ac - c) - (ab - b) + (a - (1))] / 4n

= [abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)] / 4n

O claculo dos efeitos e somas quadradas a partir dos contrastes:

$$Efeito = \frac{(Contraste)}{2^{k-1} \times n}$$

$$SQ = \frac{(Contraste)^2}{2^k \times n}$$

Tabela de Sinais para o cálculo dos efeitos no projeto 2^3.

	Efeito fatorial							
Tratamento	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
ab	+	+	+	+	-	-	-	-
c	+	-	-	+	+	-	-	+
ac	+	+	-	-	+	+	-	-
bc	+	-	+	-	+	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

8.3.1. Propriedades da Tabela de Sinais:

Exceto para a coluna I, cada coluna tem o mesmo número de sinais positivos e negativos.

A soma dos produtos de sinais de quaisquer duas colunas é zero.

A multiplicação da coluna I por qualquer outra coluna mantém esta inalterada. (I é o elemento identidade).

O produto de quaisquer duas colunas resulta uma outra coluna da tabela. Por exemplo:

A x B = AB

AB x B = AB^2 = A

8.3.2. Somas Quadradas:

SQ = $(\text{contraste})^2 / (2^k \times n)$

Exemplo: Um técnico deseja melhorar a transparência da água (maior é melhor). Os fatores controláveis são:

Fator A: Quantidade de Sulfato de Alumínio

Fator B: Quantidade de Cal

Fator C: Temperatura

Dados (três repetições)

Sulfato de AL	30ppm				40ppm			
Cal	10ppm		15ppm		10ppm		15ppm	
Temperatura	15	20	15	20	15	20	15	20
	6,1	6,6	5,1	6,4	8,3	10,4	9,5	8,7
	7,6	6,0	4,6	5,5	9,2	9,8	10,7	10,7
	6,8	6,2	5,7	6,0	10,3	8,7	8,5	9,4
Totais	20,5 (1)	18,8 c	15,4 b	17,9 bc	27,8 a	28,9 ac	28,7 ab	28,8 abc

Trat	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	Y
1	**1**	**-1**	**-1**	**1**	**-1**	**1**	**1**	**-1**	**20,5**
a	**1**	**1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**1**	**1**	**27,8**
b	**1**	**-1**	**1**	**-1**	**-1**	**1**	**-1**	**1**	**15,4**
ab	**1**	**1**	**1**	**1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**28,7**
c	**1**	**-1**	**-1**	**1**	**1**	**-1**	**-1**	**1**	**18,8**
ac	**1**	**1**	**-1**	**-1**	**1**	**1**	**-1**	**-1**	**28,9**
bc	**1**	**-1**	**1**	**-1**	**1**	**-1**	**1**	**-1**	**17,9**
abc	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**28,8**
Contraste		**41,6**	**-5,2**	**6,8**	**2**	**0,4**	**3,2**	**-5,2**	
Efeito		**3,47**	**-0,43**	**0,57**	**0,17**	**0,03**	**0,27**	**-0,43**	
SQ		**72,1**	**1,13**	**1,93**	**0,17**	**0,01**	**0,43**	**1,13**	

Contrastes obtidos a partir dos totais:

A = [a - (1) + ab - b + ac - c + abc - bc]

= [27,8 - 20,5 + 28,7 - 15,4 + 28,9 - 18,8 + 28,8 - 17,9] = 41,6

B = [b - (1) + ab - a + bc - c + abc - ac] = -5,2

C = [c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab] = 2,0

AB = [ab - a - b + (1) + abc - bc - ac + c] = 6,8

AC = [ac - a - c + (1) + abc - ab - bc + b] = 0,4

BC = [bc - b - c + (1) + abc - ab - ac + a] = 3,2

ABC = [abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)] = -5,2

Efeitos médios e *Somas Quadradas* a partir dos contrastes:

$$\text{Efeito} = \frac{(\text{Contraste})}{2^{k-1} \times n} \qquad \text{SQ} = \frac{(\text{Contraste})^2}{2^k \times n}$$

$n \times 2^{k-1} = 12$; $n \times 2^k = 24$

$E_A = C_A / 12 = 3,47$ $SQA = (C_A)^2 / 24 = 72,11$

$E_B = -5,2 / 12 = -0,43$ $SQB = (5,2)^2 / 24 = 1,13$

$E_C = 2,0 / 12 = 0,17$ $SQC = (2,0)^2 / 24 = 0,17$

$E_{AB} = 6,8 / 12 = 0,57$ $SQAB = (6,8)^2 / 24 = 1,93$

$E_{AC} = 0,4 / 12 = 0,03$ $SQAC = (0,4)^2 / 24 = 0,01$

$E_{BC} = 3,2 / 12 = 0,27$ $SQBC = (3,2)^2 / 24 = 0,43$

$E_{ABC} = -5,2 / 12 = -0,43$ $SQABC = (5,2)^2 / 24 = 1,13$

A partir das observações individuais, SQT = 87,19

Por subtração, SQR = 10,31

Análise de variância para o exemplo do volume.

Fonte	SQ	GDL	MQ	F calc	F tab
Sulfato de AL (A)	72,11	1	72,11	111,94	4,49 **
Cal (B)	1,13	1	1,13	1,75	4,49
Temperatura (C)	0,17	1	0,17	0,26	4,49
AB	1,93	1	1,93	2,99	4,49 *
AC	0,01	1	0,01	0,01	
BC	0,43	1	0,43	0,66	
ABC	1,13	1	1,13	1,75	
Erro	10,31	16	0,64		
Total	87,19	23			

O fator A é fortemente significativo; seu controle é fundamental para assegurar a transparência desejada.

Notar que muitas vezes o efeito de um fator é significativo, mas praticamente sem importância.

8.4. O PROJETO 2^K GENERALIZADO

Projeto que envolvem K fatores, cada um a dois níveis,

O modelo estatístico do projeto 2^K inclui:

K efeitos principais,

$\binom{K}{2}$ interações de dois fatores,

$\binom{K}{3}$ interações de três fatores,

Uma interação de *k* fatores.

$\binom{K}{2}$ = permutações de k elementos tomados dois a dois

$\binom{K}{n} = {K!}/{[n!\,(K-n)!]}$

É possível calcular (2k - 1) efeitos, calculados a partir dos 2k tratamentos

Para um projeto 2^4, por exemplo, os tratamentos são:

(1), a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd, abcd

Para se estimar um efeito a tabela de sinais pode ser utilizada, mas escrevê-la é trabalhoso. Alternativa, usar:

$\text{Contraste}_{AB\,...K} = (a \pm 1)\,(b \pm 1)\,...\,(K \pm 1)$

Dentro de cada parênteses utilizamos o sinal (-) se o fator está incluido no efeito ou o sinal (+) se não estiver incluido.

Por exemplo, em um projeto 2^3, o contraste para AB seria:

Contraste $_{AB}$ = (a - 1) (b - 1) (c + 1)

= abc + ab + c + (1) - ac - bc - a - b

8.4.1. Efeitos e Somas Quadradas:

$$AB \ldots K = \frac{(Contraste_{AB \ldots K})}{2^{k-1} \times n}$$

$$\mathrm{SQAB} \ldots \mathrm{K} = \frac{(\mathrm{Contraste}_{\mathrm{AB} \ldots \mathrm{K}})^2}{2^{\mathrm{k}} \times \mathrm{n}}$$

Onde “n” denota o número de repetições.

Análise de Variância para o projeto fatorial 2K.

Fonte de variação	SQ	GDL
k efeitos principais		
A	SQA	1
B	SQB	1
:	.	.
K	SQK	1
$\binom{K}{2}$ interações de 2 fatores		
AB	SQAB	1
AC	SQAC	1
:	.	.
JK	SQJK	1
$\binom{K}{3}$ interações de 3 fatores		
ABC	SQABC	1
ABD	SQABD	1
:	.	.
IJK	SQIJK	1
:	.	.
$\binom{K}{K}$ = 1 interações de k fatores		
ABC .. K	SQAB .. K	1
Erro	SQR	$2^k(n - 1)$
Total	SQT	$n2^k - 1$

8.5. O PROJETO 2^K SEM REPETIÇÕES

Quando há vários fatores a serem estudados, o número total de tratamentos (2k) cresce rapidamente.

Um projeto 2^5 envolve 32 tratamentos, um 2^6 envolve 64, e assim por diante.

Com frequência, os recursos limitados e o tempo limitado, neste casos é necessário rodar apenas uma repetição

Se não há repetições de experimento, isto é, se n = 1, não podemos estimar SQR independente.

8.5.1. Alternativa:

Contudo, se há motivos para acreditar que um efeito de interação não seja significativo, o teste

$$F = \frac{MQG}{MQR} \cong 1$$

Assim, o MQG dessa interação será aproximadamente igual a variância do erro experimental MQR, logo usa-se o valor do MQG do efeito de interação como estimativa do MQR.

Para escolher as interações que irão formar o termo de erro:

- Usar bom-senso

Interações de três ou mais fatores raramente são significativas.

- Usar conhecimentos técnicos.

Exemplo de Aditivo x Operadores

Exemplo: Taxa de filtragem de um produto químico.

Fator (A): Temperatura,

Fator (B): Pressão,

Fator (C): Concentração de reagentes,

Fator (D): Taxa de agitação.

Dados para o exemplo da taxa de filtragem (projeto 2^4).

	A0				A1			
	B0		B1		B0		B1	
	C0	C1	C0	C1	C0	C1	C0	C1
D0	45(1)	68 (c)	48 (b)	80(bc)	71(a)	60(ac)	65(ab)	65(abc)
D1	43(d)	75(cd)	45(bd)	70(bcd)	100(ad)	86(acd)	104(abd)	96(abcd)

Trat	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	Y
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	45
a	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	71
b	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	48
ab	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	65
c	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	68
ac	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	60
bc	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	80
abc	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	65
d	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	43
ad	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	100
bd	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	45
abd	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	104
cd	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	75
acd	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	86
bcd	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	70
abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	96
Cont	173.0	25.0	1.0	79.0	-145.0	19.0	15.0	117.0	133.0	-3.0	33.0	-9.0	-13.0	-21.0	11.0	
Efeito	21.6	3.1	0.1	9.9	-18.1	2.4	1.9	14.6	16.6	-0.4	4.1	-1.1	-1.6	-2.6	1.4	
SQ	1870.6	39.1	0.1	390.1	1314.1	22.6	14.1	855.6	1105.6	0.6	68.1	5.1	10.6	27.6	7.6	

Supondo as interações de 3 e 4 fatores como insignificantes, elas podem ser usadas como uma estimativa do erro:

SQR= SQABC + SQABD + SQACD + SQBCD + SQABCD

SQR= 14,1 + 68,1 + 10,6 + 27,6 + 7,6 = 127,56

Análise de variância para o exemplo da taxa de filtragem.

Efeito	SQ	GDL	MQ	F_{CALC}	F_{TAB}	Signif
A	1870,6	1,0	1870,6	73,2	6,61	SIM
B	39,1	1,0	39,1	1,5	6,61	NÃO
AB	0,1	1,0	0,1	0,0	6,61	NÃO
C	390,1	1,0	390,1	15,3	6,61	SIM
AC	1314,1	1,0	1314,1	51,4	6,61	SIM
BC	22,6	1,0	22,6	0,9	6,61	NÃO
D	855,6	1,0	855,6	33,5	6,61	SIM
AD	1105,6	1,0	1105,6	43,2	6,61	SIM
BD	0,6	1,0	0,6	0,0	6,61	NÃO
CD	5,1	1,0	5,1	0,2	6,61	NÃO
ERRO (ABC,ABD,ACD,BCD,ABCD)	127,8	5,0	25,6			
TOTAL	5730,9	15				

Os fatores A, C e D são significativos, logo deve-se ajusta-los de forma a assegurar ***Qualidade***.
O fator B não é significativo, logo pode ser usado no ajuste que obtenha ***Preço baixo***.

8.5.2. Métodos gráficos para testar a significância dos efeitos

1. Papel de probabilidade
2. Pseudo-standard error

8.6. ALGORITMO DE YATES PARA PROJETOS 2^K

A partir das respostas (totais) chegamos aos efeitos e SQ

Regra básica: somar e subtrair pares adjacentes

Exemplo: Projeto 2^3 com 2 repetições

Tratamento	Resposta	(1)	(2)	(3)	Efeitos $(3) / 2^{3-1}.2$	SQ $(3)^2 / 2^3.2$
(1)	-4	-3	1	16	I = ---	---
a	1	4	15	24	A = 3,00	36,00
b	-1	2	11	18	B = 2,25	20,25
ab	5	13	13	6	AB = 0,75	2,25
c	-1	5	7	14	C = 1,75	12,25
ac	3	6	11	2	AC = 0,25	0,25
bc	2	4	1	4	BC = 0,50	1,00
abc	11	9	5	4	ABC = 0,50	1,00

Exemplo de Yates para 2^2
Exemplo com k=2 fatores e n=3 repetições

Tratam	Resposta	1	2	Fonte	Efeito	SQ
1	36	90	197	I (total)	--	--
a	54	107	29	A	4,83	70,08
b	48	18	17	B	2,83	24,08
ab	59	11	-7	AB	-1,17	4,08

$$\text{Efeito} = \frac{(\text{Contraste})}{2^{k-1} \times n} \qquad \text{SQ} = \frac{(\text{Contraste})^2}{2^k \times n}$$

Uma demonstração simples do algoritmo de Yates é obter as colunas (1) e (2) usando as respostas (1), a, b, ab de um projeto fatorial 2^2

Tratamento	Resposta	(1)	(2)	
(1)	(1)	(1)+a	(1)+a+b+ab	= Total
a	a	b+ab	a-1+ab-b	= Cont. A
b	b	a-(1)	b+ab-(1)-a	= Cont. B
ab	ab	ab-b	ab-b-a+(1)	= Cont. AB

Como pode ser visto, os valores da coluna (2), que nesse caso são os contrastes, estão de acordo com as definições.

8.7. EXERCÍCIOS

8.1. Um grupo de engenheiros está desenvolvendo um carro de passeio. Nos primeiros testes a antena do protótipo apresentou amplitude de vibração excessiva. O grupo decidiu que os seguintes fatores poderiam influenciar a amplitude de vibração:

	Nível 1	Nível 2
A: Tipo de suporte da base	Normal	Reforçado
B: Diâmetro da antena	8	10
C: Posição da antena sobre o capô	+00	+02
D: Desenho da ponteira da antena	Arredondado	Chato

Foi feito um experimento 2^4 com duas observações por parcela. Os dados (resultados obtidos em túnel de vento) revelaram o seguinte:

	C1		C2	
	D1	D2	D1	D2
A1 B1	15,2 16,2	14,6 15,6	10,4 11,4	10,6 11,3
B2	11,8 12,9	11,8 12,5	13,9 14,7	14,0 15,4
A2 B1	14,8 15,9	15,0 15,9	10,6 11,9	11,0 12,3
B2	11,8 12,7	12,0 13,2	13,8 14,0	15,0 15,9

Pede-se:

Qual a variável de resposta que está sendo medida e quais são os fatores controláveis neste experimento ? Qual o número de níveis para cada um dos fatores controláveis ?

Use o algoritmo de Yates e calcule os efeitos e somas quadradas

Faça a análise de variância e indique quais os fatores e interações significativas

Plote os gráficos de dois fatores pertinentes a este estudo

Indique o que fazer para assegurar qualidade e preço baixo. Em relação a qualidade, considere que a máxima amplitude de vibração aceitável é 13,0. Em relação a custos, considere que:

- Suporte normal é mais barato

- Diâmetro menor é mais barato

- Posição +00 é de montagem mais fácil

- Ponteira arredondada é mais barata

Solução:

a) Algoritmo de Yates

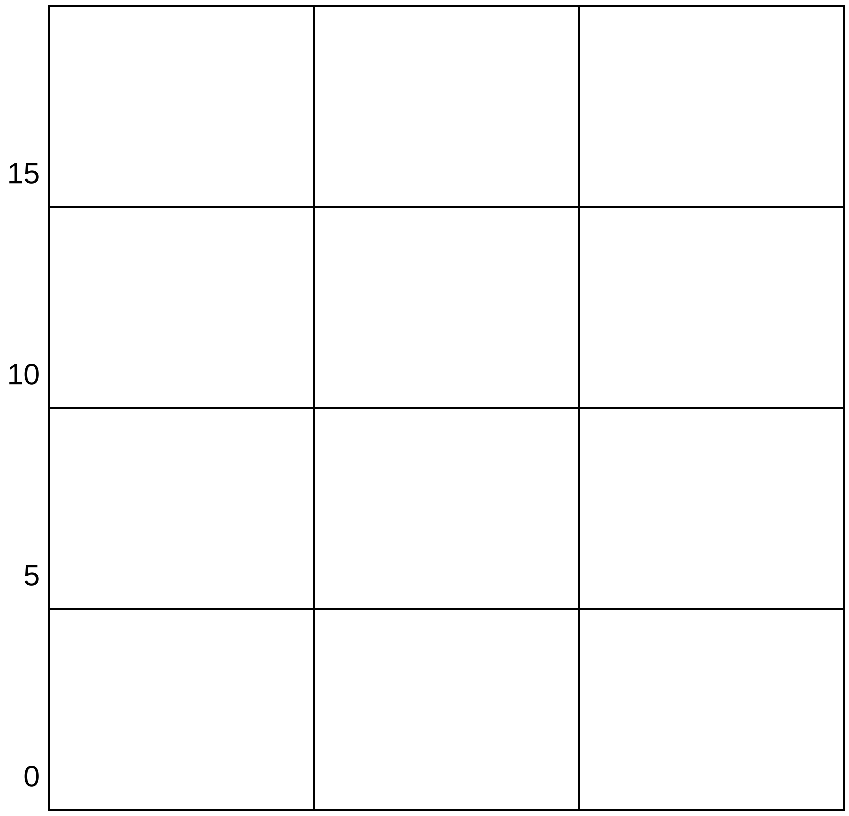
Tratam.	Resposta	(1)	(2)	(3)	(4)	Efeito	SQ
(1)	31,4	62,1	111,3			---	
A	30,7	49,2	100,7				
B	24,7	44,3					
Ab	24,5	56,4					
C	21,8						
Ac	22,5						
Bc	28,6						
Abc	27,8						
D							
Ad							
Bd							
Abd							
Cd							
Acd							
Bcd							
Abcd							
						Σ =	95,39

b) Análise de variância

Fonte	SQ	GDL	MQ	F calc.	Signif. ?
A					
B					
Ab					
C					
Ac					
Bc					
abc					
D					
Ad					
Bd					
abd					
Cd					
acd					
bcd					
abcd					
Erro					
Total	103,53				

d) Gráfico de dois fatores

Amplitude



e) Tomada de decisão

8.2. Um engenheiro está realizando um experimento para otimizar a quantidade de salmoura injetada em um tipo de alimento. A quantidade de salmoura é uma variável do tipo nominal-é-melhor, com valor alvo igual a 70 unidades. Analise os dados a seguir, encontre os fatores significativos e indique o melhor ajuste para este processo.

Pressão de Operação	A1=120				A2=150			
Velocidade da Esteira	B1=300		B2=400		B1=300		B2=400	
Batida das Agulhas	C1=20	C2=30	C1	C2	C1	C2	C1	C2
	75 73 76 77	80 78 75 83	45 42 47 47	50 54 48 51	92 93 95 99	95 100 99 101	75 75 79 68	77 80 83 85

Um engenheiro está realizando um experimento para otimizar o teor de umidade em um produto a base de soja. Analise os dados a seguir, encontre os fatores significativos e faça os gráficos pertinentes. Qual o ajuste que maximixa a umidade ? e qual o ajuste que minimiza a umidade ?

Máquina 1

Tempo de secagem	A1=20				A2=30			
Temperatura do processo	B1=60		B2=70		B1=60		B2=70	
Vazão de ar	C1=2,5	C2=3,5	C1	C2	C1	C2	C1	C2
	6,2	7,4	7,1	8,5	7,8	8,2	9,3	10,5

Máquina 2

Tempo de secagem	A1=20				A2=30			
Temperatura do processo	B1=60		B2=70		B1=60		B2=70	
Vazão de ar	C1=2,5	C2=3,5	C1	C2	C1	C2	C1	C2
	6,6	7,1	7,5	8,2	7,3	8,4	9,5	9,9

9. Experimentos Fatoriais Confundidos em Blocos

José Luis Duarte Ribeiro
Carla ten Caten

Algumas vezes a aleatorização completa fica restringida.

Por exemplo, talvez não seja possível rodar todos os ensaios:

- No mesmo dia;
- Na mesma sala;
- Com o mesmo operador

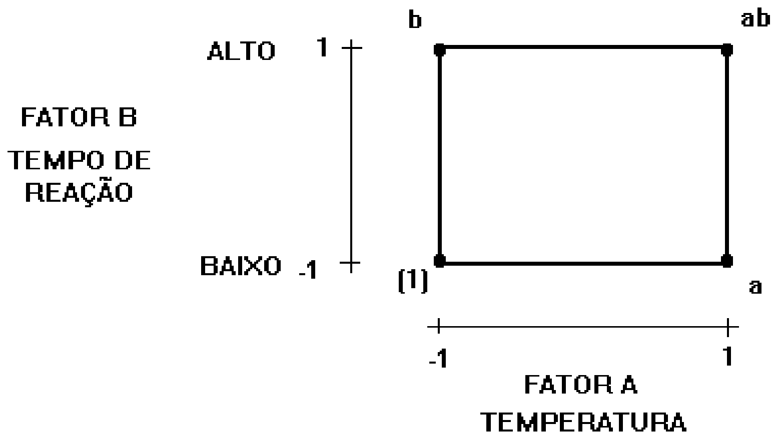
Nesses casos, alguma informação ficará ***confundida***.

Vejamos um problema onde isso acontece:

As características de um produto químico dependem de:

Fator A: Temperatura
Fator B: Tempo de Reação

Se os fatores estão a dois níveis, temos:



9.1.1. Restrição Experimental:

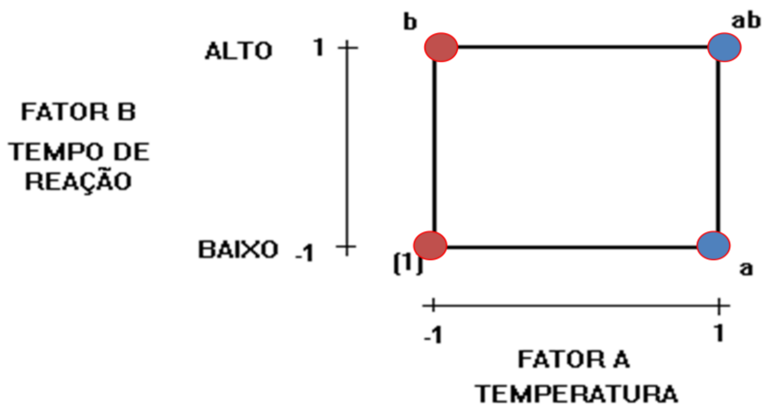
- O material usado no processo químico é produzido em lotes (vermelho e azul)
- É preciso dois lotes para obter as quatro amostras

9.2. CONFUNDIMENTO

Diferenças entre os lotes ficarão confundidas com um dos efeitos, dependendo do plano de amostragem seguido:

		Plano	
Lotes ou Blocos	I	II	III
1	(1) b	(1) a	(1) ab
2	a ab	b ab	a b

Plano I

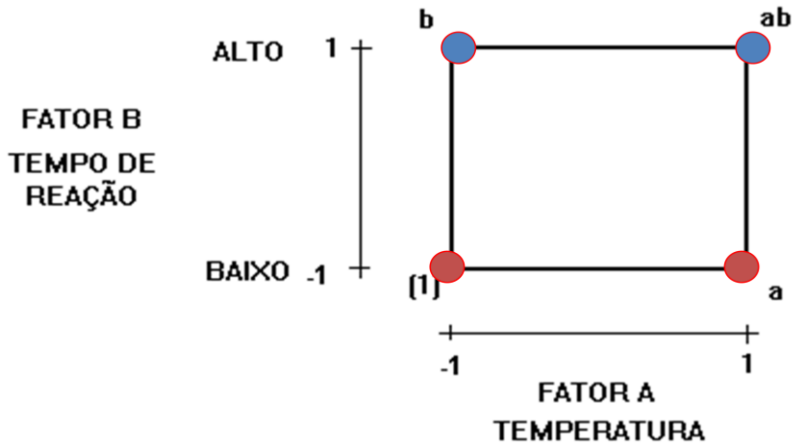


A partir da definição dos contrastes, é fácil verificar quem está confundido:

Plano I: Bloco 2 (azul) - Bloco 1 (vermelho) = ab + a - b - (1) = C_A

Plano I: Efeito do Fator A está confundido com os blocos e o efeito do fator B e interação AB estão salvos

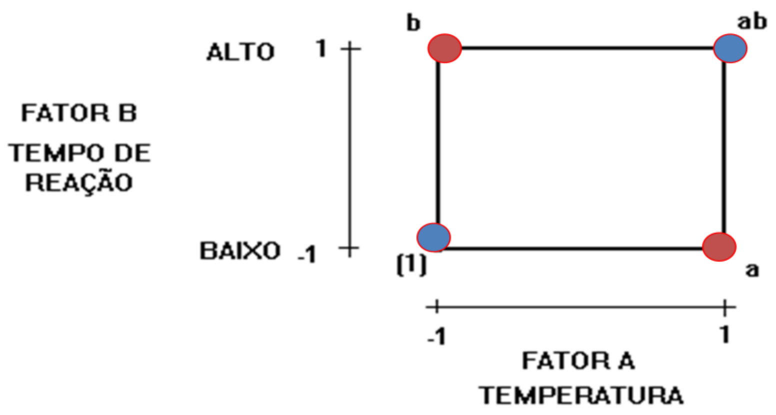
Plano II



Plano II: Bloco 2 (azul) - Bloco 1 (vermelho) = ab +b –a - (1) = C_B

Plano II: Efeito do Fator B está confundido com os blocos e o efeito do fator A e interação AB estão salvos

Plano III



Plano III: Bloco 2 (azul) - Bloco 1 (vermelho) = ab +(1) –a - b = C_{AB}

Plano III: Efeito do Fator de interação AB está confundido com os blocos e o efeito do fator A e B estão salvos

É preferível confundir o efeito do bloco com o efeito de uma interação A esperança é que o efeito de interação não seja significativo

9.3. SISTEMA PARA CONFUNDIR EFEITOS:

- Definir um contraste de definição. Isto é, a informação que ficará confundida com os blocos
- Definir quais os tratamentos que irão em cada bloco, usando:

Núm. de letras pares em comun com o CD (neste exemplo AB) vão em um bloco (1)
Núm. de letras ímpares em comum com o CD (neste exemplo AB) vão no outro bloco (2)

Para o exemplo do projeto 2^2, escolhendo ***AB*** como contraste de definição, resulta:

	Bloco I	Bloco II	
Pares	(1) ab	a b	Ímpares

A análise de variância resultaria

Fonte	SQ	GDL
A	SQA	1
B	SQB	1
AB ou Blocos	SQAB	1
Total	SQT	3

Este exemplo é apenas acadêmico, pois não temos GDL para o termo de erro.

9.4. EXPERIMENTOS CONFUNDIDOS EM BLOCO COM REPETIÇÃO

Quando há repetições, há duas possibilidades:

- Experimentos completamente confundidos
- Experimentos parcialmente confundidos

9.5. EXPERIMENTOS COMPLETAMENTE CONFUNDIDOS

Quando em todas as repetições o mesmo CD é confundido.

Seja o exemplo de um 2^3, onde apenas 4 tratamentos podem ser rodados num dia e, assim, o projeto deve ser dividido em dois. E seja que escolhemos ***ABC*** como o C.D.

Bloco I	Bloco II
(1)	a
Ab	b
Ac	c
Bc	abc

Se há 3 repetições, o arranjo dos ensaios poderia ser:

Repetição I		Repetição II		Repetição III	
Bloco 1	Bloco 2	Bloco 2	Bloco 1	Bloco 1	Bloco 2
ac	a	c	(1)	ab	c
(1)	c	abc	ac	(1)	b
ab	abc	b	bc	ac	abc
bc	b	a	ab	bc	a

Em todas as repetições ABC é o contraste de definição;

mas de resto $\rightarrow$ Aleatorização

9.5.1. Modelo Estatístico

$Y_{ijkmn} = \mu + R_m + B_n + RB_{mn} + A_i + B_j + C_k + AB_{ij} + AC_{ik} + BC_{kj} + \varepsilon_{mijk}$

R_m representa o efeito das repetições

B_n representa o efeito dos blocos 1 e 2

RB_{mn} interação entre repetições e blocos

Usualmente o erro é tomado como a interação entre as repetições e os efeitos principais e suas interações:

$$\varepsilon_{mijk} = RA_{mi} + RB_{mj} + RC_{mk} + RAB_{mij} + RAC_{mik} + RBC_{mjk}$$

O efeito das repetições e o efeito dos blocos são analisados separadamente com o objetivo de principal de diminuir o termo de erro.

9.5.2. ANOVA para projeto 2^3 completamente confundido:

Fonte	GDL	
R_m Repetições	2	5 entre as
B_n Blocos ou ABC	1	subdivisões
RB Repetições x Blocos	2	
A	1	
B	1	
AB	1	18 dentro das
C	1	subdivisões
AC	1	
BC	1	
Erro = Repet. x Outros	12	
Total	23	

- Repetições e Blocos podem ser testados contra RB. Teste fraco pois RB possui apenas 2 graus de liberdade.
- Efeitos principais e interações podem ser testadas contra o erro. Teste forte pois o erro tem 12 graus de liberdade.
- ABC não pode ser testada (confundida com blocos)

9.6. EXPERIMENTOS PARCIALMENTE CONFUNDIDOS

No exemplo anterior, ABC foi confundida em todas as repetições. Mas se há repetições, uma alternativa é:

Confundir ABC na 1a repetição
Confundir AB na 2a repetição
Confundir AC na 3a repetição
Confundir BC na 4a repetição

Repetição I Conf. ABC		Repetição II Conf. AB		Repetição III Conf. AC		Repetição IV Conf. BC	
(1)	a	(1)	a	(1)	a	(1)	b
ab	b	c	b	ac	c	bc	c
ac	c	ab	ac	abc	bc	a	ab
bc	abc	abc	bc	b	ab	abc	ac

9.6.1. Modelo Estatístico

$$Y_{ijkmn} = \mu + R_m + B_{n(m)} + A_i + B_j + C_k + AB_{ij} + AC_{jk} + BC_{kj} + ABC_{ijk} + \varepsilon_{mijk}$$

$B_{n(m)}$ indica que os blocos estão aninhados dentro das repetições (em cada repetição os blocos 1 e 2 são diferentes)

$$SQB(R) = SQB + SQBR; \quad GDL = 1 + 3 = 4$$

9.6.2. *Análise do projeto 2^3* parcialmente confundido:

Fonte	GDL	
R_m Repetições	3	7 entre as subdivisões
B_n Blocos (dentro de Rep.)	4	
ABC	1	
AB	1	
AC	1	
BC	1	
A	1	24 dentro das subdivisões
B	1	
C	1	
AB	1	| Somente das repet.
AC	1	| em que não estão
BC	1	| confundidas
ABC	1	|
Erro = Repet. x Outros	17	
Total	31	

$$Erro = RA + RB + RC + RAB + RAC + RBC + RABC$$

$$GDL = 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 17$$

9.7. EXPERIMENTOS CONFUNDIDOS EM BLOCO SEM REPETIÇÃO

Muitas vezes é preciso dividir em blocos e só há recursos para uma repetição

Se há muitos fatores envolvidos, digamos 4 ou mais fatores, projetos desse tipo são viáveis.

9.7.1. Estratégia de ação:

- Uma interação de ordem superior é sacrificada (confundida)
- Outras são aglutinadas para formar o termo de erro

Por exemplo, seja um fatorial 2^4, onde somente oito tratamentos podem ser rodados de uma vez.

Uma possível divisão em dois blocos seria usar o contraste de definição ABCD:

Bloco 1	(1) ab bc ac abcd cd ad bd
Bloco 2	a b abc c bcd acd d abd

9.7.2. Análise de variância:

Fonte	GDL	
A	1	
B	1	
C	1	
D	1	
AB	1	
AC	1	
AD	1	
BC	1	
BD	1	
CD	1	
ABC	1	|
ABD	1	| 4 GDL para
ACD	1	| o termo de erro
BCD	1	|
Blocos (ABCD)	1	
Total	15	

- Interações de três ou mais fatores não poderiam ser avaliadas; mas em geral não são significativas
- Todos os efeitos principais e interações de dois fatores poderiam ser avaliados

9.8. DIVISÃO EM MAIS DE DOIS BLOCOS

Também é possível a divisão em mais que dois blocos

Seja um 2^4 que devido a restrições experimentais deve ser rodado em 4 blocos.

Contraste de definição: ABC e BCD

Atenção: nesse caso ABC x BCD = AD também fica automaticamente confundido

Usando o procedimento par-ímpar mencionado anteriormente:

Confundido ABC	Confundido BCD	
(1) ab ac bc d abd acd bcd	(1) bc abd acd	1
	ab ac d bcd	2
a b c abc ad bd cd abcd	a abc bd cd	3
	b c ad abcd	4

9.8.1. Tabela de sinais com os contrastes de definição para a divisão em 4 blocos

Trat	A	B	C	D	E	ABC	BCD	Blocos
(1)	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
a	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	3
b	-1	1	-1	-1	-1	1	1	4
ab	1	1	-1	-1	-1	-1	1	2
c	-1	-1	1	-1	-1	1	1	4
ac	1	-1	1	-1	-1	-1	1	2
bc	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
abc	1	1	1	-1	-1	1	-1	3
d	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	2
ad	1	-1	-1	1	-1	1	1	4
bd	-1	1	-1	1	-1	1	-1	3
abd	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
cd	-1	-1	1	1	-1	1	-1	3
acd	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
bcd	-1	1	1	1	-1	-1	1	2
abcd	1	1	1	1	-1	1	1	4
e	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
ae	1	-1	-1	-1	1	1	-1	3
be	-1	1	-1	-1	1	1	1	4
abe	1	1	-1	-1	1	-1	1	2
ce	-1	-1	1	-1	1	1	1	4
ace	1	-1	1	-1	1	-1	1	2
bce	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
abce	1	1	1	-1	1	1	-1	3
de	-1	-1	-1	1	1	-1	1	2
ade	1	-1	-1	1	1	1	1	4
bde	-1	1	-1	1	1	1	-1	3
abde	1	1	-1	1	1	-1	-1	1
cde	-1	-1	1	1	1	1	-1	3
acde	1	-1	1	1	1	-1	-1	1
bcde	-1	1	1	1	1	-1	1	2
abcde	1	1	1	1	1	1	1	4

9.8.2. *Método de Yates* para o cálculo das Somas Quadradas

Tratam.	Resposta	(1)	(2)	(3)	(4)	SQ
(1)	82	158	322	606	1252	
a	76	164	284	646	60	225,00
b	79	155	320	32	2	0,25
ab	85	129	326	28	30	56,25
c	71	159	0	-20	-32	64,00
ac	84	161	32	22	32	64,00
bc	55	153	14	18	-14	12,25
abc	74	173	14	12	-26	42,25
d	80	-6	6	-38	40	100,00
ad	79	6	-26	6	-4	1,00
bd	73	13	2	32	42	110,00
abd	88	19	20	0	-6	2,25
cd	72	-1	12	-32	44	121,00
acd	81	15	6	18	-32	64,00
bcd	84	9	16	-6	50	156,25
abcd	89	5	-4	-20	-14	12,25
Total						1031,00

9.8.3. Tabela Anova para o experimento 2^4 em 4 blocos

Fonte	SQ	GDL	MQ	Fcalc
A	225	1	225	8,6
B	0,25	1	0,25	0
C	64	1	64	2,4
D	100	1	100	3,8
AB	56	1	56	2,1
AC	64	1	64	2,4
BC	12,25	1	12,25	0,5
BD	110,25	1	110,25	4,2
CD	121	1	121	4,5
Blocos (ou ABC ou BCD ou AD)	199,5	3	66,5	
Erro (ABD + ACD + ABCD)	78,5	3	26,17	
Total	1031	15		

O termo de erro tem apenas 3 GDL e os teste são feitos usando $F_{0,05}(1,3) = 10,13 \rightarrow$ nenhum efeito significativo

Contudo, B e BC parecem não significativos. Aglutinando esses efeitos ao erro:

$SQR = 78,50 + 0,25 + 12,25 = 91,00$;

$GDL = 3 + 1 + 1 = 5$

$MQR = 91,00/5 = 18,2$

$F\ calc\ A = 225 / 18,2 = 12,36$

$F\ calc\ CD = 121 / 18,2 = 6,65$

Efeito	SQR	GDL	MQR	Fcalc	Ftab
A	225,00	1	225	12.36	6.61
C	64,00	1	64	3.52	6.61
D	100,00	1	100	5.49	6.61
AB	56,00	1	56	3.08	6.61
AC	64,00	1	64	3.52	6.61
BD	110,25	1	110.25	6.06	6.61
CD	121,00	1	121	6.65	6.61
Blocos (ou ABC ou BCD ou AD)	199,50	3	66.5	3.65	6.61
Erro (ABD + ACD + BCD+B+BC)	91,0	5	18.2		
Total	1031,00	15			

Agora, temos $F_{0,05(1,5)} = 6{,}61 \rightarrow$ A e CD significativos

- Experimentos 2^k são rodados para fornecer um quadro geral
- Já que B apareceu como não significativo, um novo experimento poderia ser planejado sem esse fator.

9.9. PROJETOS FATORIAIS FRACIONADOS 2^{k-1}

Com o aumento do número de fatores, o número de tratamentos e o número de interações aumentam rapidamente

k	2^k	Efeitos Princ.	Interacoes 2 FC	3 FC	4 FC	5 FC	5 FC	7 FC	8 FC
5	32	5	10	10	5	1			
6	64	6	15	20	15	6	1		
7	128	7	21	35	35	21	7	1	
8	256	8	28	56	70	56	28	8	1

As interações de ordem superior geralmente são:

- Difíceis de interpretar
- Não são significativas

Logo em geral, não temos interesse em estudar as interações de mais alta ordem

Para experimentos com muitos fatores:

- Pode não ser possível ($) rodar o experimento completo
- Quase a mesma informação pode ser obtida realizando-se uma fração (½) dos ensaios

Quando somente uma fração dos ensaios é rodada,
o projeto é chamado ***Fatorial Fracionado***

9.9.1. Procedimento para definir projetos fracionados

- Dividir em dois ou mais blocos o projeto completo, confundindo uma (ou mais) interações de ordem superior
- E, após, ensaiar apenas um dos blocos, escolhido aleatoriamente.

9.10. EFEITOS VINCULADOS

Seja o caso simples de um projeto 2^3 onde o técnico só tem recursos para efetuar 4 ensaios, ou seja, a metade do 2^3.

Confundindo ABC com os blocos, resulta:

Bloco 1	(1) ab ac bc
Bloco 2	a b c abc

Por sorteio, decide-se rodar apenas o bloco 2.

- Que informação pode ser obtida do bloco 2 ?
- Que informação fica perdida ou confundida ?

Tratamentos	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
a	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
b	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
ab	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
c	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
ac	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
bc	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
abc	1	1	1	1	1	1	1	1

A partir da tabela de sinais, observamos que não é possível distinguir entre, por exemplo, os contrastes de A e BC, pois os ensaios ab, ac, (1) e bc não foram realizados:

C_A =	**+a**	**+ab**	**+ac**	**+abc**	**-(1)**	**-b**	**-c**	**-bc**
C_{BC} =	**+a**	**-ab**	**-ac**	**+abc**	**+(1)**	**-b**	**-c**	**+bc**

Como os ensios que diferenciavam os contras de C_A e C_{BC} não ofram realizados, os efeitos de A e BC estão vinculados

Do mesmo modo, B e AC estão vinculados, e também C e AB

É preciso cuidado ao escolher o contraste de definição para a blocagem

- A idéia é que dois fatores importantes não devem estar vinculados entre si
- O que deve ser feito é vincular um efeito importante com uma interação de ordem superior (suposta insignificante)
- Se o bloco 1 for rodado ao invés do bloco 2, a situação dos vínculos é a mesma.

9.10.1. Modo rápido de encontrar os vínculos:

Multiplicar os efeitos pelo(s) contraste(s) de definição, neste exemplo, o contraste ABC

Vínculo de A: $A(ABC) = A^2BC = BC$

Vínculo de B: $B(ABC) = AB^2C = AC$

Vínculo de C: $C(ABC) \;=\; ABC^2 \;=\; AB$

9.11 EXPERIMENTO 2^4 COMPLETO VS FRACIONADO

A matriz experimental de um projeto 2^4 completo

Tratamentos	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
a	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
b	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
ab	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
c	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
ac	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
bc	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
abc	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
d	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
ad	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
bd	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
abd	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
cd	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
acd	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
bcd	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

No experimento completo não há correlação entre nenhum fator indicando que todos os efeitos podem ser estudados separadamente. O termo de erro pode ser estimado pelas interações de três fatores e a interação ABCD é usada para estudar o efeito do bloco.

	A	*B*	*AB*	*C*	*AC*	*BC*	*ABC*	*D*	*AD*	*BD*	*ABD*	*CD*	*ACD*	*BCD*	*ABCD*
A	1														
B	0	1													
AB	0	0	1												
C	0	0	0	1											
AC	0	0	0	0	1										
BC	0	0	0	0	0	1									
ABC	0	0	0	0	0	0	1								
D	0	0	0	0	0	0	0	1							
AD	0	0	0	0	0	0	0	0	1						
BD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1					
ABD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1				
CD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
ACD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		
BCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
ABCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Matriz experimental 2^4 fracionado ou seja 2^{4-1} onde foi usado o contraste de definição ABCD para blocagem e posterior fracionamento

Tratamentos	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	Y
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	10
ab	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	15
ac	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	25
bc	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	35
ad	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	40
bd	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	35
cd	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	30
abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	50
Contraste	20	30	-30	40	0	30	70	70	30	0	40	-30	30	20		

No experimento fracionado é possível estimar apenas 7 efeitos pois metade dos efeitos está vinculada a outra metade.

Sistema para verificação dos efeitos vinculados: multiplica-se o efeito pelo contraste de definição ABCD ou realiza-se a matriz de correlação.

Efeito	Contraste	Efeito vinculado
A	ABCD	BCD
B	ABCD	ACD
AB	ABCD	CD
C	ABCD	ABD
AC	ABCD	BD
BC	ABCD	AD
ABC	ABCD	D
D	ABCD	ABC
AD	ABCD	BC
BD	ABCD	AC
ABD	ABCD	C
CD	ABCD	AB
ACD	ABCD	B
BCD	ABCD	A

Os efeitos vinculados são:
- A com BCD,
- B com ACD,
- AB com CD,
- C com ABD,
- AC com BD,
- BC com AD,
- ABC com D.

	A	*B*	*AB*	*C*	*AC*	*BC*	*ABC*	*D*	*AD*	*BD*	*ABD*	*CD*	*ACD*	*BCD*	*ABCD*
A	1														
B	0	1													
AB	0	0	1												
C	0	0	0	1											
AC	0	0	0	0	1										
BC	0	0	0	0	0	1									
ABC	0	0	0	0	0	0	1								
D	0	0	0	0	0	0	1	1							
AD	0	0	0	0	0	1	0	0	1						
BD	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1					
ABD	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1				
CD	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
ACD	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		
BCD	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
ABCD	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	1

Não recomenda-se um experimento 2^{4-1} pois interações de dois fatores estão vinculadas com outras de dois fatores. As interações de três fatores não podem ser usadas na estimativa do termo de erro pois estão vinculadas com fatores principais. A interação ABCD não pode ser estimada devido ao fracionamento ter sido realizado usando o seu contraste de definição.Seria necessário realizar repetições para estimar o termo de erro.

A única maneira de um experimento 2^{4-1} tornar-se viável seria caso um dos fatores B, C ou D não interagisse com os demais, ou seja, teriamos razões técnicas para escolher entre as interações de dois fatores vinculadas.

9.12 EXPERIMENTO 2^5 COMPLETO VS FRACIONADO

Matriz experimental de um experimento 2^5 completo

Trata-men-tos	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	E	AE	BE	ABE	CE	ACE	BCE	ABCE	DE	ADE	BDE	ABDE	CDE	ACDE	BCDE	ABCDE
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
a	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
b	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
ab	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
c	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
ac	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
bc	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
abc	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
d	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
ad	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
bd	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
abd	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
cd	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
acd	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
bcd	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
e	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
ae	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
be	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
abe	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
ce	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
ace	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
bce	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
abce	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
de	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
ade	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
bde	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
abde	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
cde	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
acde	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
bcde	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
abcde	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	E	AE	BE	ABE	CE	ACE	BCE	ABCE	DE	ADE	BDE	ABDE	CDE	ACDE	BCDE	ABCDE
A	1																														
B	0	1																													
AB	0	0	1																												
C	0	0	0	1																											
AC	0	0	0	0	1																										
BC	0	0	0	0	0	1																									
ABC	0	0	0	0	0	0	1																								
D	0	0	0	0	0	0	0	1																							
AD	0	0	0	0	0	0	0	0	1																						
BD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1																					
ABD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1																				
CD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1																			
ACD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1																		
BCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1																	
ABCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1																
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1															
AE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1														
BE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1													
ABE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1												
CE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1											
ACE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1										
BCE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1									
ABCE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1								
DE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1							
ADE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1						
BDE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1					
ABDE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1				
CDE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
ACDE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		
BCDE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
ABCDE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

No experimento completo não há correlação entre nenhum fator indicando que todos os efeitos podem ser estudados separadamente. O termo de erro pode ser estimado pelas interações de três fatores e quatro fatores e a interação ABCDE é usada para estudar o efeito do bloco.

Matriz experimental 2^5 fracionado ou seja 2^{5-1} onde foi usado o contraste de definição ABCDE para blocagem e posterior fracionamento

Tratamentos	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	E	AE	BE	ABE	CE	ACE	BCE	ABCE	DE	ADE	BDE	ABDE	CDE	ACDE	BCDE	ABCDE
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
ab	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
ac	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
bc	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
ad	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
bd	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
cd	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
ae	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
be	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
ce	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
abce	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
de	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
abde	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
acde	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
bcde	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Sistema para verificação dos efeitos vinculados: multiplica-se o efeito pelo contraste de definição ABCDE ou realiza-se a matriz de correlação.

Efeito	Contraste	Efeitos vinculados
A	ABCDE	BCDE
B	ABCDE	ACDE
AB	ABCDE	CDE
C	ABCDE	ABDE
AC	ABCDE	BDE
BC	ABCDE	ADE
ABC	ABCDE	DE
D	ABCDE	ABCE
AD	ABCDE	BCE
BD	ABCDE	ACE
ABD	ABCDE	CE
CD	ABCDE	ABE
ACD	ABCDE	BE
BCD	ABCDE	AE
ABCD	ABCDE	E

	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	E	AE	BE	ABE	CE	ACE	BCE	ABCE	DE	ADE	BDE	ABDE	CDE	ACDE	BCDE	ABCD
A	1
B	0	1
AB	0	0	1
C	0	0	0	1
AC	0	0	0	0	1
BC	0	0	0	0	0	1
ABC	0	0	0	0	0	0	1
D	0	0	0	0	0	0	0	1
AD	0	0	0	0	0	0	0	0	1
BD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ABD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
CD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ACD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
BCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ABCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
AE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1
BE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
ABE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1
CE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ACE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
BCE	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ABCE	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
DE	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ADE	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
BDE	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ABDE	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
CDE	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ACDE	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
BCDE	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ABCDE	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	1

Recomenda-se o experimento 2^{5-1}pois interações de dois fatores estão vinculadas com outras de três fatores, o que não é considerado problema uma vez que as interações de três serão provavelmente não significativas . As interações de três fatores não podem ser usadas na estimativa do termo de erro, pois estão vinculadas com interações de dois fatores. A interação ABCDE não pode ser estimada devido ao fracionamento ter sido realizado usando o seu contraste de definição Seria necessário realizar repetições para estimar o termo de erro.

9.13 EXEMPLO 2^{4-1}

Número de cartas processadas por minuto em uma máquina processadora de envelopes

Fator A: Ângulo da correia transportadora

Fator B: Velocidade da correia

Fator C: Material da correia

Fator D: Posição da polia

Cada um desses fatores é fixado em dois níveis e a metade de um 2^4, ou seja, um 2^{4-1} é rodado.

ABCD é escolhido como o contraste de definição

Assim, A(ABCD) = BCD, ...

AB(ABCD) = CD, ...

As fórmulas usuais são utilizadas nos cálculos, ou seja,

$$\text{Efeito} = \frac{\text{Contraste}}{N/2} \; ; \quad SQ = \frac{\text{Contraste}^2}{N} \qquad \text{onde } N = 2^{4-1} = 8$$

A matriz experimental de um projeto fatorial 2^4

Tratamentos	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABC
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
a	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
b	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
ab	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
c	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
ac	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
bc	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
abc	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
d	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
ad	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
bd	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
abd	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
cd	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
acd	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
bcd	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Como pode ser visto, ABCD foi usado como o contraste de definição para a divisão em dois blocos. O bloco amarelo formado pelos sinais positivos do contraste ABCD e o bloco branco formado pelos sinais negativos.

Os engenheiros executaram apenas o bloco amarelo.

Bloco 1	(1) ab ac bc ad bd cd abcd
Bloco 2	a b c abc d abd acd bcd

Análise de variância para o projeto 2^{4-1}

Fonte	SQ	GDL
A ou BCD	2701,125	1
B ou ACD	1128,125	1
AB ou CD	3,125	1
C ou ABD	1,125	1
AC ou BD	1,125	1
BC ou AD	28,125	1
D ou ABC	1,125	1
Total	3863,875	7

- Não há termo de erro
- Mas evidentemente A e B são significativos
- Um estudo adicional desses fatores deveria ser planejado

9.14 ALGORITMO DE YATES PARA PROJETOS FATORIAIS FRACIONADOS 2^{k-1}

O procedimento é o seguinte:

- listar na ordem padrão os tratamentos de um projeto 2^{k-1}
- Adicionar entre parênteses uma letra (ou letras) para obter os tratamentos que foram efetivamente rodados

Seja o exemplo anterior de um 2^{4-1}, tendo ABCD como o contraste de definição

E seja que o bloco 1 apenas é rodado

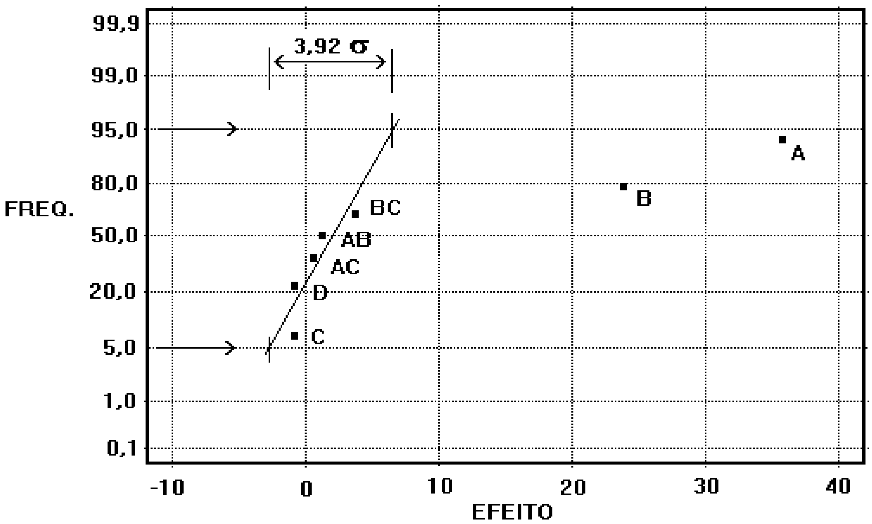
9.14.1 Exemplo Algoritmo de Yates

Tratamento	Resposta	(1)	(2)	(3)	Efeito $(3)/2^{3-1}.1$	SQ $(3)^2/2^3.1$
(1)	74	182	404	805	--	
a(d)	108	222	401	147	A+BCD = 36,75	2701,125
b(d)	92	173	72	95	B+ACD = 23,75	1128,125
ab	130	228	75	5	AB+CD = 1,25	3,125
c(d)	68	34	40	-3	C+ABD = -0,75	1,125
ac	105	38	55	3	AC+BD = 0,75	1,125
bc	95	37	4	15	BC+AD = 3,75	28,125
abc(d)	133	38	1	-3	ABC+D = -0,75	1.125

9.14.2 PAPEL DE PROBABILIDADE

- Listar os efeitos em ordem (I = 1,7) crescente
- Plotar os efeitos no eixo vertical,
- Com os valores de 100((2I-1) / 2N) no eixo vertical

Efeito	Valor	Ordem I	100((2I-1) / 14)
C	-0,75	1	7,1
D	-0,75	2	21,4
AC	0,75	3	35,7
AB	1,25	4	50,0
BC	3,75	5	64,2
B	23,75	6	78,6
A	36,75	7	92,8



9.14.3 Duas formas de se estimar MQR:

- Aglutinando as SQ dos efeitos não significativos:
  $SQR = SQC + SQD + SQAC + SQAB + SQBC = 34{,}625$
  $MQR = 34{,}625 / 5 = 6{,}9$
- Graficamente:
  $3{,}92\,\sigma \cong 9{,}2 \rightarrow \sigma \cong 2{,}34 \rightarrow \sigma 2 = MQR \cong 5{,}50$

O valor do MQR estimado é colocado na tabela para continuar os cálculos da tabela ANOVA.

Fonte	SQ	GDL	MQ	F	p-value	F crit
A	2701,13	1,00	2701,13	390,05	0,00001	6,61
B	1128,13	1,00	1128,13	162,91	0,00005	6,61
Erro	34,63	5,00	6,93			
Total	3863,90	7,00				

Pela tabela ANOVA, conclui-se que os fatores A e B são significativos.

9.15 EXPERIMENTO 2^{7} COMPLETO VS FRACIONADO

9.15.1 Projeto 2^7 dividido em dois

Metade de um 2^7 = 64 ensaios

Confundindo a interação mais alta com os blocos:

ou seja, Contraste de definição = ABCDEFG

e dividindo em dois blocos, resulta:

Bloco 1	(1) ab ac bc ad bd cd abcd ....
Bloco 2	a b c abc d acd abd bcd .....

Ensaia-se apenas um bloco, mas antes verifica-se os vínculos

$A(ABCDEFG) = BCDEFG$ ...

$AB(ABCDEFG) = CDEFG$ ...

$ABC(ABCDEFG) = DEFG$ ... etc.

Tomando para erro as interações de três e quatro fatores,

Fonte	GDL	Sub-total
Efeitos principais A, B, ..., G (ou interações de 6 fatores)	1 para cada	7
Interações de 2 fatores (ou interações de 5 fatores)	1 para cada	21
Interações de 3 fatores (ou interações de 4 fatores)	1 para cada	35
Total		63

9.15.2 Projeto fatorial fracionado em quatro

Seja que no exemplo anterior os recursos permitissem rodar apenas 32 ensaios. Assim, é preciso rodar um projeto fracionado em 4.

Escolhendo duas interações de 4a ordem, por exemplo ABCDE e CDEFG, para fazer a divisão dos blocos, então automaticamente uma terceira interação fica confundida:

$$ABCDE(CDEFG) = ABC^2D^2E^2FG = ABFG$$

As interações confundidas não são independentes
Portanto, devem ser escolhidas com cuidado

Nesse projeto fracionado em 4, cada efeito estará vinculado o outros três, por exemplo:

$A(ABCDE) = BCDE$; $A(CDEFG) = ACDEFG$; $A(ABFG) = BFG$

$B(ABCDE) = ACDE$; $B(CDEFG) = BCDEFG$; $B(ABFG) = AFG$

$AB(ABCDE) = CDE$; $AB(CDEFG) = ABCDEFG$; $AB(ABFG) = FG$

- Efeitos principais livres de interações de 1a ordem
- Três interações de 1a ordem (AB, AF, AG) vinculadas a outras interações de 1a ordem (FG, BG, BF)
- Escolher com cuidado os fatores principais B, F, G
- Se qualquer um deles não apresentar interação com os demais, (por exemplo, operador x aditivo), o experimento poderá ser rodado
- As restantes 15 interações de 1a ordem estão livres de interações que não sejam de 2a ordem ou mais
- Há ainda 6 GDL para o erro, que envolvem apenas interações de 2a ordem ou mais.

9.15.3 *Análise* do projeto 2^7 fracionado em quatro

Fonte	GDL	Sub-total
Efeitos principais A, B, ..., G	1 para cada	7
Interações de 1a ordem AC, AD, ...	1 para cada	15
AB (ou FG), AF (ou BG), AG (ou BF)	1 para cada	3
Interações de 2a ordem ACF, ACG, ...	1 para cada	6
Total		31

9.16 EXERCÍCIOS

9.1 Um grupo de engenheiros deseja determinar quais os fatores que afetam o tempo de processamento em uma workstation. Eles decidem fazer um experimento incluindo os seguintes fatores:

Fator	Nível 1	Nível 2
A = Nº de softwares abertos	2	4
B = Processador I/O	Não	Sim
C = Distribuição dos arquivos	C1	C2
D = Tipo de coprocessador	D1	D2

Como os ensaios são bastante trabalhosos (exigem mudar o setup do computador e tomam tempo), a escolha recaiu sobre um projeto 2^4 dividido em dois, ou seja, em um 2^{4-1}. Os dados coletados (tempo em minutos) revelaram:

(1) =	19,6	bc =	11,8
ab =	29,2	bd =	22,0
ac =	19,2	cd =	08,7
ad =	29,5	abcd =	20,6

Como pode ser visto, ABCD foi usado como o contraste de definição para o fracionamento. Considerando que o fator D não interage em absoluto com os demais (informação técnica dos engenheiros), mas os demais fatores podem interagir entre si, pede-se:

a) Qual a característica de qualidade que está sendo medida ?

b) Use o método de Yates e ache os efeitos e somas quadradas

c) Indique quais os fatores e interações significativos

d) O que fazer para obter qualidade ? Economia ?

Solução:

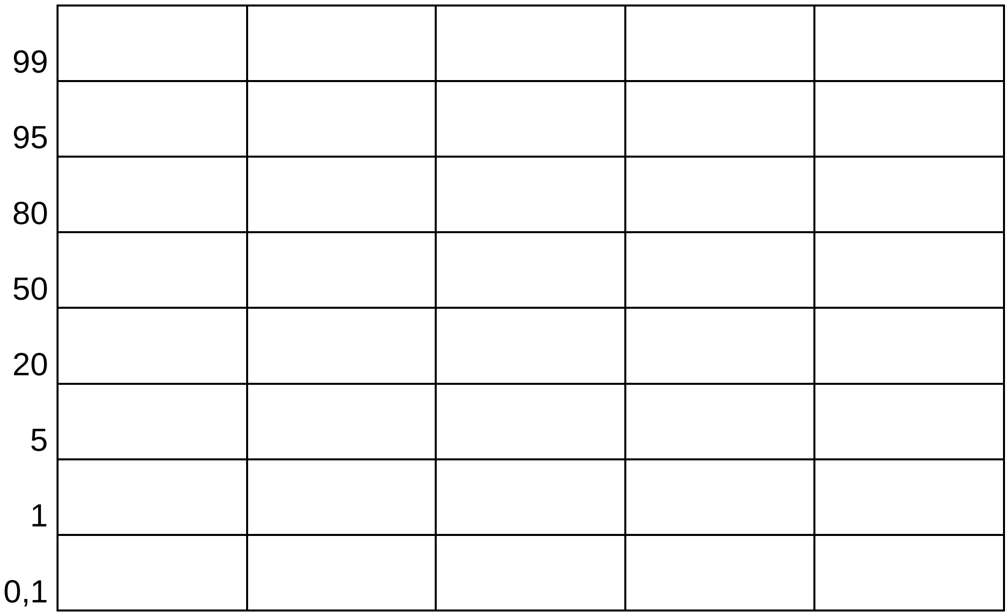
a) Característica de qualidade:

b) Tabela de Yates

Tratam.	Resposta	(1)	(2)	(3)	Efeito	SQ
(1)					--	
a					A = BCD =	
b					B = ACD =	
ab						
c						
ac						
bc						
abc						
					Σ =	374,95

c) Papel de probabilidade para identificar efeitos significativos:

Efeito	Valor	Ordem i	100 (2i-1) / 14
D	-10,00	1	7,1
AB	-1,10	2	21,4
C			
BC			
AC			
B			
A			



Efeitos significativos:

d) Tomada de decisão

9.2. Um engenheiro de alimentos está estudando um processo de resfriamento. Por questões de textura e sabor, sabe-se que o tempo de resfriamento ideal é de 90 min. Analise os dados a seguir, identifique os fatores significativos e conclua a respeito do melhor ajuste para o processo.

Temperatura do ar	A1=0				A2=5			
Velocidade do ar	B1=10		B2=20		B1=10		B2=20	
Posição na câmara	C1 = baixa	C2 = alta	C1	C2	C1	C2	C1	C2
Espaçamento entre unidades	D1 = 12	D2 = 15	D2	D1	D2	D1	D1	D2
	89	96	113	106	85	80	97	101

10 Metodologia de Superfície de Resposta e Otimização

José Luis Duarte Ribeiro
Carla ten Caten

10.14 METODOLOGIA DE SUPERFÍCIE DE RESPOSTA

10.14.2 Introdução à MSR

A Metodologia de Superfície de Resposta (MSR) envolve uma série de técnicas orientadas à análise de experimentos planejados de modo a gerar informações suficientes para a modelagem das respostas de interesse através de superfícies n-dimensionais.

Após a construção de modelos para a resposta, o interesse recai na busca do ajuste ótimo, ou seja, na busca de regiões que conduzam a um valor mínimo, máximo ou nominal, conforme a característica da resposta em questão.

Aplicações da MSR

A MSR tem ampla aplicação dentro da engenharia, contribuindo para a otimização de produtos ou processos, principalmente quando os fatores controláveis são a níveis contínuos.

Apesar do potencial da MSR no que se refere a otimização de produtos e processos, essa metodologia é pouco empregada no Brasil, pois exige o domínio dos conceitos básicos de projeto de experimentos, regressão múltipla e otimização, e poucas escolas de engenharia mantém cursos que contemplem todas essas áreas.

10.14.3 Etapas no uso da MSR

A proposta da MSR é responder questões gerais referente ao comportamento da resposta dentro do intervalo de interesse e, em particular, mapear regiões de alto desempenho. Os estudos envolvem três etapas principais:

- Planejar o experimento, distribuindo adequadamente os pontos experimentais
- Estimar os coeficientes da equação da superfície de resposta
- Explorar a superfície de resposta encontrando o ajuste dos fatores que maximiza a resposta

A estratégia de análise supõe que a resposta Y possa ser representada por uma função polinomial dos fatores controláveis X_1, X_2, ..., X_k. Entre os modelos possíveis, estão o modelo linear,

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots + b_kX_k$$

o modelo quadrático,

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots b_{11}X_1^2 + b_2X_2^2 + \cdots + b_{12}X_1X_2 + \cdots$$

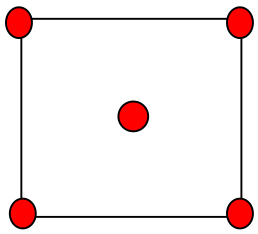
e também modelos não lineares.

10.14.4 Projetos de Superfície de resposta

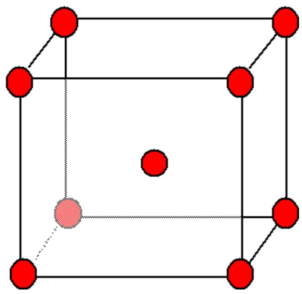
Os coeficientes dos modelos podem ser estimados mais eficientemente se for usado um projeto experimental adequado para a coleta de dados. Projetos para o ajuste de superfícies de resposta são chamados de projetos de superfície de resposta.

Por exemplo, para ajustar modelos lineares, toda a classe de experimentos 2^k são particularmente eficientes. Eles permitem fracionamento, blocagem e a suposição de linearidade pode ser facilmente testada acrescentando-se alguns pontos centrais.

Exemplos de projetos para modelos lineares



Um projeto 2^2 com um ponto central



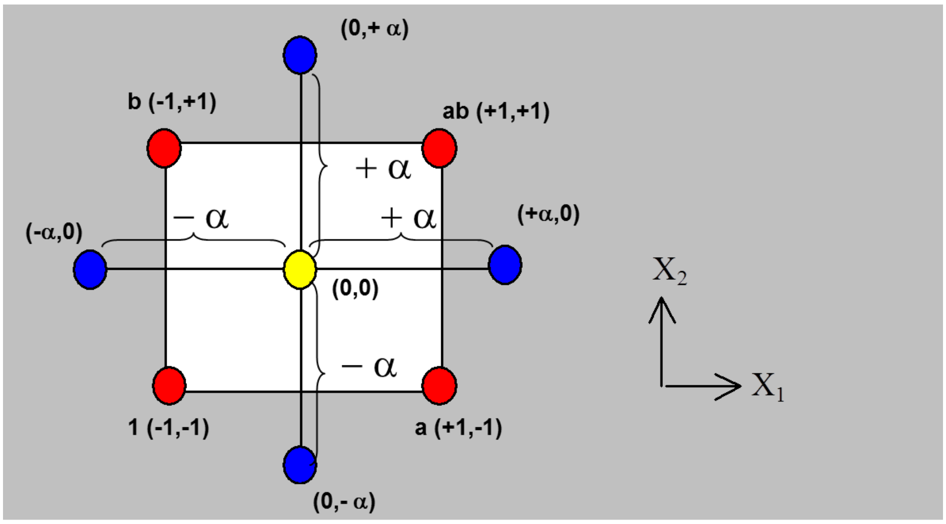
Um projeto 2^3 com um ponto central

10.14.5 Projetos para modelos quadráticos

Para o ajuste de modelos quadráticos, o Projeto Composto de Segunda Ordem (PCSO) é recomendado. Esse projeto, que será visto a seguir tem inúmeras vantagens. Ele tem como base um projeto 2^k, exige um número pequeno de ensaios, pode contemplar blocagem, rotacionalidade e ortogonalidade.

O que aparece a seguir é um exemplo de um PCSO para um experimento de dois fatores controláveis:

Exemplo de um PCSO



Matriz experimental

A matriz experimental para esse experimento seria a seguinte:

Rodada	X1	X2	Y
1 (1)	-1	-1	Fatorial
2 (a)	+1	-1	Fatorial
3 (b)	-1	+1	Fatorial
4 (ab)	+1	+1	Fatorial
5	α	0	Estrela
6	$-\alpha$	0	Estrela
7	0	α	Estrela
8	0	$-\alpha$	Estrela
9	0	0	Central

10.14.6 Construção dos PCSO

Como pode ser visto, o PCSO é a soma de um experimento 2^k, mais uma estrela, mais pontos centrais. Por isso o nome projeto composto. Os pontos da parte fatorial (2^k) permitem a estimativa de termos lineares e interações. Os pontos da estrela, permitem a estimativa de efeitos quadráticos puros.

De forma geral, os PCSO consistem de três partes:

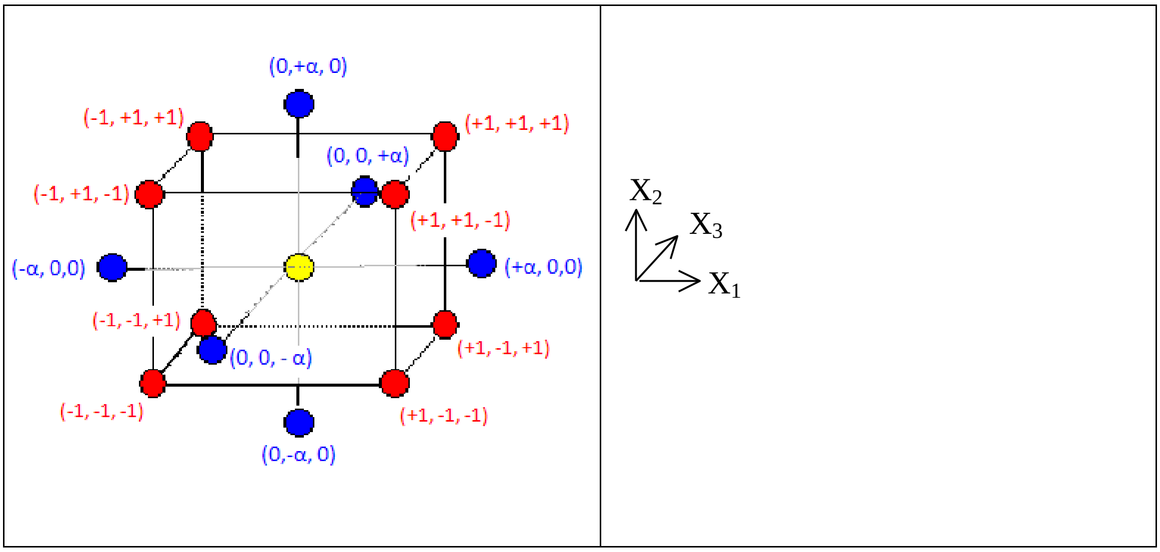
a) A parte fatorial, ou seja 2^k vértices de um cubo k dimensional (ou uma fração desses vértices) com coordenadas $\pm1, \pm1, ..., \pm1$.

b) A parte em estrela, 2xk vértices com coordenadas $0, ..., \pm\alpha, ...,0$.

c) n_o pontos centrais, com coordenadas 0,0,...

Exemplo de um PCSO - 3 fatores

A figura a seguir apresenta um PCSO para um experimento de três fatores:



Matrix experimental

A matriz experimental desse projeto seria:

Rodada	X1 (A)	X2 (B)	X3 (C)	Y
1 (1)	- 1	- 1	- 1	Fatorial
2 (a)	+ 1	- 1	-1	Fatorial
3 (b)	- 1	+ 1	- 1	Fatorial
4 (ab)	- 1	+ 1	+ 1	Fatorial
5 (c)	-1	-1	+ 1	Fatorial
6 (ac)	+ 1	- 1	+ 1	Fatorial
7 (bc)	- 1	+ 1	+ 1	Fatorial
8 (abc)	+ 1	+ 1	+ 1	Fatorial
9	α	0	0	Estrela
10	-α	0	0	Estrela
11	0	α	0	Estrela
12	0	-α	0	Estrela
13	0	0	α	Estrela
14	0	0	-α	Estrela
15	0	0	0	Central

10.14.7 Características dos PCSO

Caso necessário, o projeto pode contemplar repetições do ponto central, aumentando os graus de liberdade do termo de erro, ou seja, permitindo uma avaliação mais precisa da variância experimental.

O valor de alfa pode ser definido de modo que o projeto tenha algumas propriedades interessantes. Por exemplo, alfa pode ser calculado para atribuir rotacionalidade ou ortogonalidade ao projeto.

10.14.7.1 Rotacionalidade

Um projeto rotacional assegura a mesma precisão nas estimativas de Y para todos os pontos do espaço amostral. Para atribuir rotacionalidade ao projeto, o valor de alfa deve ser definido usando:

$\alpha = F^{\frac{1}{4}}$ onde F se refere ao número de pontos da parte fatorial

10.14.7.2 Ortogonalidade

Outra possibilidade é atribuir ao projeto a condição de ortogonalidade. Nesse caso, a estimativa dos coeficientes de termos lineares e quadráticos resultam independente, ou seja, essas estimativas não se alteram quando algum termo é eliminado do modelo.

Para atribuir ortogonalidade ao projeto, o valor de alfa deve ser definido usando:

$$\alpha = \left\{\frac{\left[(F+T)^{1/2} - F^{1/2}\right]}{4 \times n^2} \times F\right\}^{\frac{1}{4}}$$

onde F se refere ao número de pontos da parte fatorial

T é o número de pontos adicionais (estrela mais pontos centrais), multiplicado pelo número de repetições n

10.14.7.3 Blocos ortogonais

Por fim, os PCSO são particularmente eficientes quando existe a necessidade de blocagem. Nesse caso, o projeto é normalmente dividido em dois: um bloco contendo a parte fatorial e o outro bloco contendo a parte em estrela. Os pontos centrais são utilizados para assegurar o mesmo número de ensaios em cada bloco.

Para assegurar que os blocos serão ortogonais entre si, o que irá permitir extrair o efeito entre blocos, caso ele exista, basta ter o mesmo número de ensaios em cada bloco e definir o valor de alfa usando:

$$\alpha = \sqrt{\frac{F}{2}}$$

10.15 MODELAGEM DAS VR

Inicialmente, a partir dos resultados do experimento planejado, chega-se a modelos para as variáveis de resposta. Esses modelos podem contemplar média e variabilidade:

$$\begin{array}{ll}
Y_1 = f1\,(X_1, X_2, ..., X_k) & \sigma_{Y1} = g1\,(X_1, X_2, ..., X_k) \\
Y_2 = f2\,(X_1, X_2, ..., X_k) & \sigma_{Y2} = g2\,(X_1, X_2, ..., X_k) \\
: & : \\
Y_p = fp\,(X_1, X_2, ..., X_k) & \sigma_{Yp} = gp\,(X_1, X_2, ..., X_k)
\end{array}$$

Para todas as variáveis de resposta Y_j, já se conhece de antemão o seu valor alvo, os limites de especificação e a importância relativa (IR_j).

10.15.2 Regressão linear simples

A regressão linear simples se aplica àquelas situações onde há duas variáveis (digamos, X e Y) que podem possuir uma relação de causa e efeito. A variável X é chamada de variável independente ou fator controlável (causa) e a variável Y é a variável dependente ou variável de resposta (efeito, que depende de X). É dito relação linear simples, pois supõe-se tendência linear entre as variáveis e simples por ser uma única variável independente (X).

Seja que existam dados coletados (pares de valores) associando uma variável de resposta Y (variável dependente) com uma variável regressora X (variável independente). E suponha que a relação entre Y e X seja aproximadamente linear. Então o valor esperado de Y para cada valor de X virá dado por:

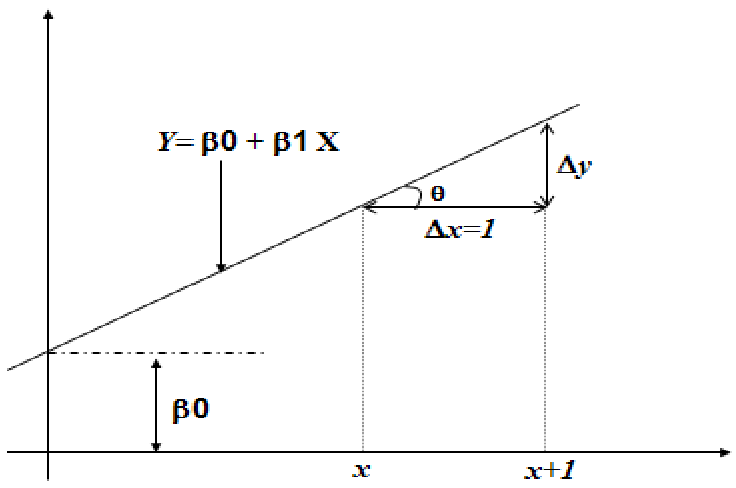
$$E(Y/X) = \beta 0 + \beta 1X$$

onde os parâmetros da relação linear, β0 e β1, são desconhecidos.

Vamos supor que cada observação Y possa ser descrita pelo modelo:

$$Y = \beta 0 + \beta 1X + \varepsilon$$

onde ε é o erro aleatório, com média 0 e variância σ2.

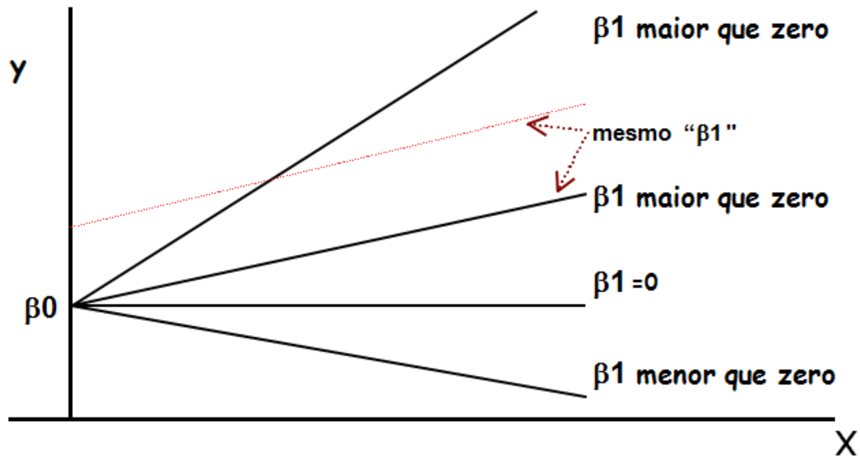


Na equação de regressão linear simples, os coeficientes são:

β0 é a intersecção, ou seja, o valor que Y assume quando X=0.

β1 é o coeficiente angular (inclinação da reta). O coeficiente β0 mostra a variação de Y para cada unidade de variação de X. O coeficiente angular β1é a tangente do ângulo e quanto maior o valor mais inclinada é a reta.

- Se "β1" é positivo, a reta é crescente;
- Se "β1" é negativo, a reta é decrescente;
- Se "β1"é zero, Y não depende de X e a reta é paralela ao eixo X na altura do valor β0.



Exemplo

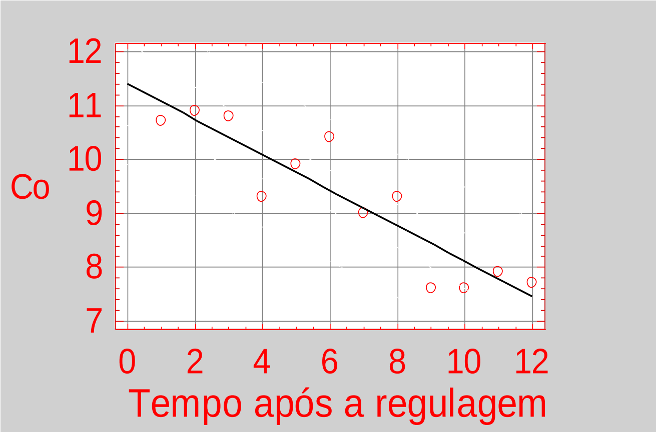
Após uma regulagem eletrônica um veículo apresenta um rendimento ideal no que tange a rendimento de combustível. Contudo, com o passar do tempo esse rendimento vai se degradando. Os dados que aparecem na tabela representam o rendimento medido mês a mês após a regulagem. Calcule a equação de regressão.

X: meses após a regulagem	1	2	3	4	5	6
Y : rendimento	10,7	10,9	10,8	9,3	9,5	10,4
X: meses após a regulagem	7	8	9	10	11	12
Y : rendimento	9,0	9,3	7,6	7,6	7,9	7,7

Se há n pares de dados (Y_1, X_1), ..., (Yn, Yn) é possível estimar os parâmetros β0 e β1 usando o método dos Mínimos Quadrados, o qual busca minimizar:

$$L = \Sigma (Y_{obs}-Y_{est})^2 = \Sigma (Yi - (b0 + b1\ Xi))^2$$

Meses(X)	Rendimento(Y)
1	10,7
2	10,9
3	10,8
4	9,3
5	9,5
6	10,4
7	9
8	9,3
9	7,6
10	7,6
11	7,9
12	7,7



O Método dos Quadrados busca minimizar:

$$L = \sum (Y_{obs} - Y_{est})^2 = \sum \left(Y_i - (b0 + b1\,Xi)\right)^2$$

Onde b0 e b1 são estimativas amostrais de β0 e β1. O uso do método conduz as seguintes estimativas:

$b1 = S_{XY} / S_{XX}$

$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X}$

onde:

$$S_{XX} = \sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2 / n$$

$$S_{YY} = \sum Y_i^2 - \left(\sum Y_i\right)^2 / n$$

$$S_{XY} = \sum X_i Y_i - \left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right) / n$$

Meses(X)	Rendimento(Y)	X^2	Y^2	X*Y
1	10,7	1	114,49	10,7
2	10,9	4	118,81	21,8
3	10,8	9	116,64	32,4
4	9,3	16	86,49	37,2
5	9,5	25	90,25	47,5
6	10,4	36	108,16	62,4
7	9	49	81	63
8	9,3	64	86,49	74,4
9	7,6	81	57,76	68,4
10	7,6	100	57,76	76
11	7,9	121	62,41	86,9
12	7,7	144	59,29	92,4
78	**110,7**	**650**	**1039,55**	**673,1**

$\sum X_i = 78{,}00$; $\sum X_i^2 = 650{,}00$; $\overline{X} = 6{,}50$

$\sum Y_i = 110{,}70;\quad \sum Y_i^2 = 1039{,}55;\quad \bar{Y} = 9{,}225$

Desvio-padrão de X

$$S_{XX} = \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2/n = 650 - (78)^2/12 = 143{,}00$$

Desvio-padrão de Y

$$S_{YY} = \sum Y_i^2 - (\sum Y_i)^2/n = 1039{,}55 - (110{,}70)^2/12 = 18{,}34$$

Covariância de X,Y:

$$S_{XY} = \sum X_i Y_i - (\sum X_i)(\sum Y_i)/n = 673{,}1 - (78 \times 110{,}70)/12 = -46{,}45$$

Estimativa dos parâmetros:

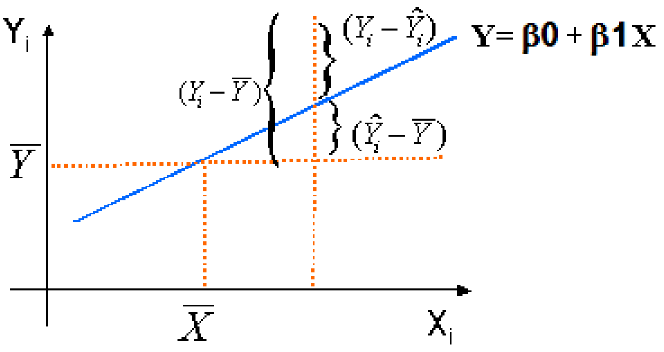
$$b1 = SXY/SXX = -46{,}45/143{,}00 = -0{,}325$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X} = 9{,}225 - (-0{,}325)6{,}50 = 11{,}34$$

Equação de regressão

$$Y = 11{,}34 + (-0{,}325) \times X$$

Coeficiente de determinação R^2



Coeficiente de determinação R^2 é uma medida de quão bem a equação de regressão se ajusta aos dados amostrais. R^2 equivale a proporção da variância dos valores de Y que pode ser atribuída à regressão com a variável X.

O coeficiente de determinação é calculado segundo:

$$R^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} \times S_{yy}}$$

O coeficiente de determinação indica o percentual da variabilidade de Y que é explicado pelo modelo de regressão em função de X.

Para o exemplo analisado resultou

$$R^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} \times S_{yy}} = \frac{-46{,}45^2}{143{,}00 \times 18{,}34} = 0{,}82$$

$R^2 = (-0{,}907)^2 = 0{,}82$, ou seja, 82% da variabilidade nos resultados de rendimento de combustível pode ser devida ao tempo decorrido após a regulagem e 18% da variabilidade total é devido a outros fatores que não foram investigados ou a fatores de ruido.

Hipóteses do Modelo

A adequação do ajuste e as suposições do modelo podem ser verificadas através de uma análise dos resíduos. Deve-se realizar a análise de resíduos que é a diferença entre os valores observados e os previstos pela equação

$$R_i = Y_{obs} - Y_{est}$$

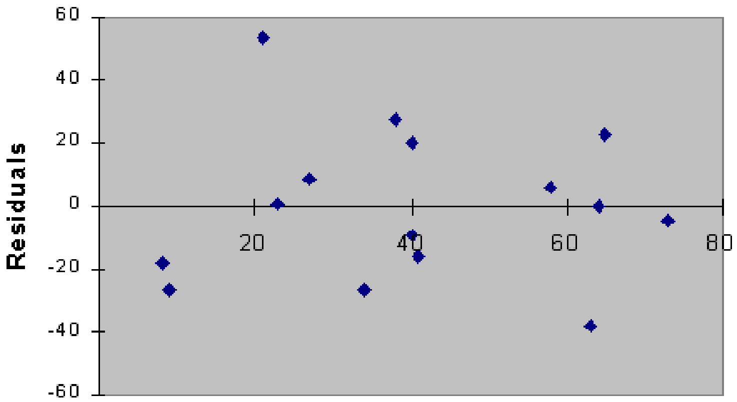
$$R_i = Y_{obs} - (b_0 + b_1 X_i)$$

E verificar as seguintes hipóteses:

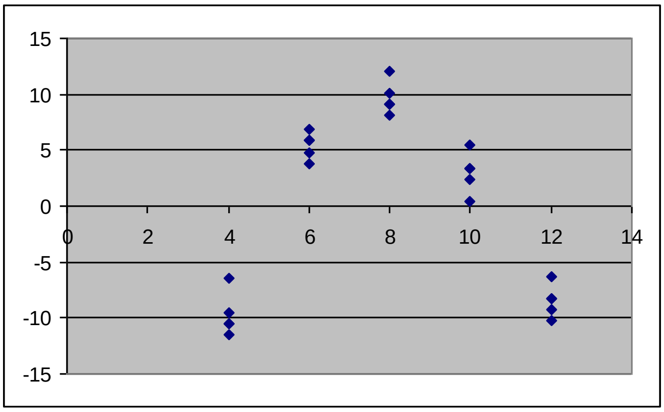
- A distribuição do erro possui média zero;
- A variância do erro é constante;
- A distribuição do erro é normal;
- Os valores do erro são independentes dos y observados.

Adequação do ajuste

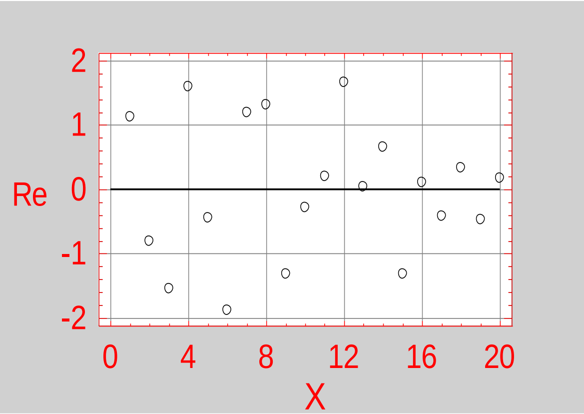
A adequação do ajuste é testada plotando os resíduos em função de X. Se o ajuste for bom, os resíduos seguirão um padrão aleatório. Caso contrário, alguma tendência curvilíneo será observada.

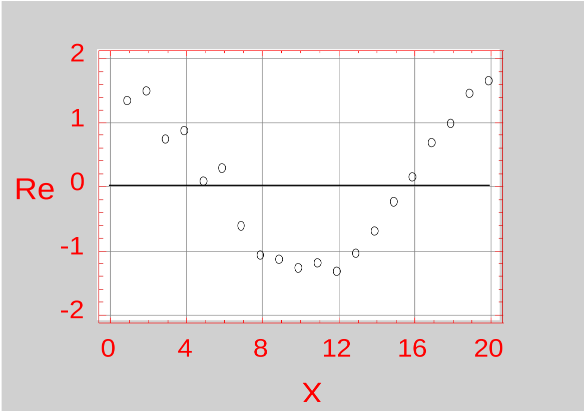


Na figura abaixo, os resíduos não são aleatórios, demonstrando a falta de ajuste do modelo linear:



Na Figura abaixo (a) representa uma situação onde o ajuste é adequado, enquanto que (b) representa uma situação onde o modelo linear não se ajusta bem aos dados.





(a) (b)

Caso os resíduos não estejam distribuídos aleatoriamente é indício de falta de ajuste do modelo, ou seja, faltou algum termo quadrático, um logarítmico ou outros (de uma ou mais variáveis independentes). Quando isso acontecer deve-se acrescentar a tabela dos dados colunas com os termos julgados necessários.

Se o modelo linear não fornece um bom ajuste, as vezes o problema pode ser contornado trabalhando-se com valores transformados de X ou Y, por exemplo:

$$\text{Y} = b_0 + b_1\sqrt{X}$$

$$\text{Y} = b_0 + b_1 X^* \text{ onde } \text{X} * = \sqrt{X}$$

Dados atípicos

Alguns dados coletados podem estar muito influenciados por fatores externos ao estudo, ou podem ter sido digitados errados, ou podem ser provenientes de erros de leitura.

Os resíduos padronizados são calculados dividindo-se o resíduo pelo desvio-padrão:

$$Z_i = \frac{Y_i - (b_0 + b_1 X_i)}{S}$$

onde:

$$\text{S} = \sqrt{SQR/n - 2}$$

$$\text{SQR} = S_{YY-\ b_1 S_{XY}}$$

Considera-se um valor atípico quando o resíduo padronizado (Z) for maior do que:

Z > 3,00 considerando um intervalo de confiança de 99,73% ou

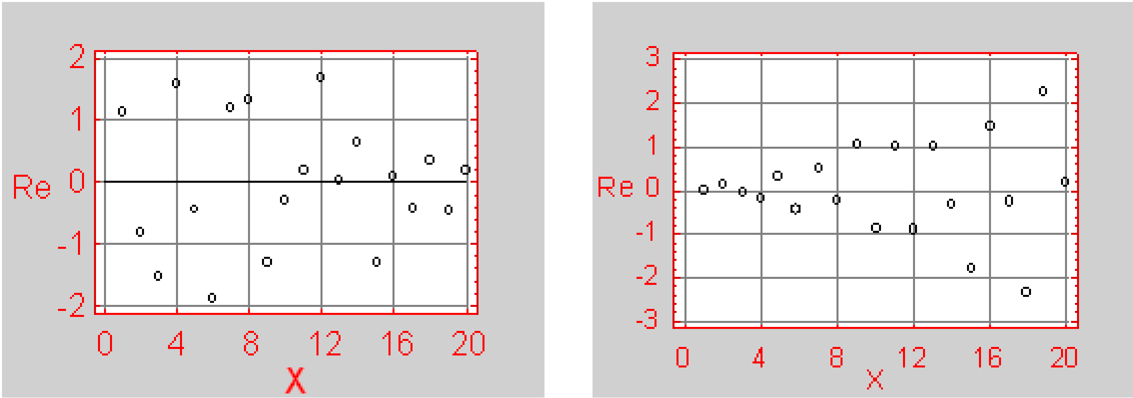
Z > 1,96 considerando um intervalo de confiança de 95,00 %

Quando há desconfiança da presença destes dados, deve-se verificar a procedência dos mesmos e caso sejam valores realmente atípicos, deverão ser retirados e uma nova regressão deve ser feita.

Homogeneidade da variância

A suposição de homogeneidade da variância σ^2 ao longo de todo o intervalo de X também pode ser verificada analisando o gráfico de Resíduos × X.

A Figura abaixo apresenta duas situações: (a) onde verifica-se a suposição de homogeneidade, e (b) onde essa suposição é violada.



(a) (b)

.

Se a suposição de homogeneidade da variância é rejeitada, pode-se usar o método da regressão linear ponderada, onde se busca os valores de $\beta 0$ e $\beta 1$ que minimizam

$$L = \sum (Y_{obs} - Y_{est})^2 = \sum K_i (Y_i - (b_0 + b_1 X_i))^2$$

Nesse caso, os pesos k_i são inversamente proporcionais à variância.

Exercício (resolução no Excel)

Um serviço de tele-entrega tem um site para entregas a domicílo, e fez um levantamento de quanto gastaram 32 de seus clientes durante certo período. Ele deseja saber se este gasto depende da distância do domicílio ao ponto de venda:

Distância do domicílio ao Ponto de Vendas (Km)	Consumo Médio semanal (R$)
2,3	23,1
3,1	27,5
3,8	26,1
2,1	24
3,4	26,2
4,6	31,3
2,8	26,1
2,6	19,6
4,8	36,4
1,8	17,8
4,3	31,3
5,5	36
0,7	14,1
3	22,3
1,1	17,3

A equação apresenta um valor de b1= 4,92 ou seja, para cada km adicional de distância do morador, o consumo semanal dele aumenta de R$ 4,92

Pelo equação poderia-se concluir que quando X=0, o consumo previsto é de R$10,28? Não.

A equação só é válida para o intervalo estudado (ou seja entre 0,7 Km e 6,1 Km). Não é possivel aplicar a equação para valores fora do intervalo investiga

10.15.3 Regressão Múltipla

Embora haja muitos problemas em que uma variável pode ser predita com bastante precisão em termos de outra, é claro que as predições devem melhorar se for levado em conta informações adicionais importantes. Por exemplo:

- Pode-se fazer melhores predições sobre o desempenho de funcionários recém contratados se for levado em consideração não somente sua formação, mas também seu tempo de experiência e sua personalidade;

- Pode-se fazer melhor predição do sucesso de um novo produto se for considerado não somente sua qualidade, mas o potencial de procura e a concorrência.

- A qualidade de um processo químico pode depender da temperatura, pressão e taxa de agitação. Nesse caso há três variáveis regressoras.

Uma equação de regressão linear múltipla expressa uma relação entre uma variável dependente e duas ou mais variáveis independentes.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

Onde:

Y = valor da variável dependente

β_0 = coeficiente de intersecção

k = número de variáveis independentes

$X_1, X_2, \ldots, X_k$, = variáveis independentes

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ = coeficientes das variáveis independentes

e = termo de erro

O problema então é estimar o valor dos coeficientes β_i a partir de um conjunto de dados do tipo:

Y	X_1	X_2	...	X_k
y_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}
y_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
y_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nk}

Ou seja, estimar b_o, b_1, b_2 ...

10.15.4 Exemplo

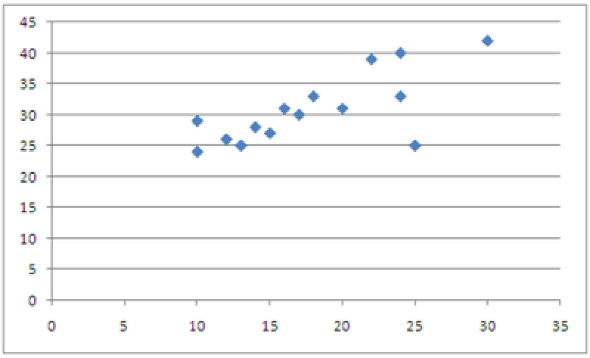
Um distribuidor de cerveja está analisando seu sistema de distribuição. Ele está interessado em prever o tempo requerido para atender um ponto de venda. O engenheiro industrial acredita que os dois fatores mais importantes são o número de caixas de cerveja fornecidas e a distância do depósito ao posto de venda. Os dados devem ser coletados pareados. As linhas representam as observações coletadas e as colunas os fatores controláveis (Xs) e a Variável de resposta (Y).

X_1: n° de caixas	**X_2: n° de caixas**	**Y: tempo**
10	30	24
15	25	27
10	40	29
20	18	31
25	22	25
18	31	33

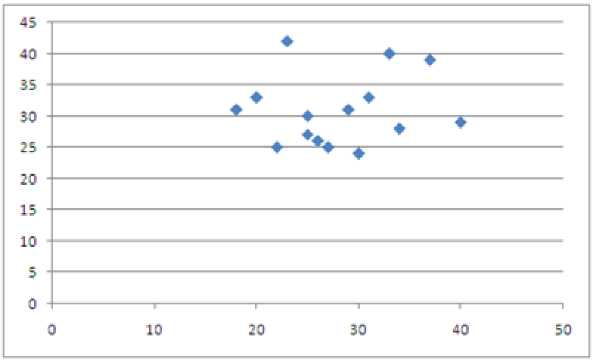
12	26	26
14	34	28
16	29	31
22	37	39
24	20	33
17	25	30
13	27	25
30	23	12
24	33	40

Resolução:

- Análise preliminar dos dados: Fazer um gráfico de dispersão das variáveis independentes versus variável dependente.



X_1 = número de caixas



X_2 = distância

Análise do modelo

Para testar a significância geral do modelo de regressão realiza-se o teste de hipótese F para confirmar a "inexistência de relação entre X e Y ".

H0: β_1 ; β_2 ; ...; $\beta_k = 0$

H1: $\beta_{ji} \neq 0$ para pelo menos um

Obtém-se o $F_{calculado}$ fazendo MQR/MQR_{eg}

A hipótese nula será rejeitada quando:

$F_{calculado} > F_{a/2,k,n-k-1}$ ou $valor - p < 0{,}05(5\%)$

ANOVA

	gl	SQ	MQ	F	F de significação
Regressão	2	331,3585994	165,67929997	16,7954	0,000332524
Resíduo	12	118,3747339	9,864561157		

Total	14	449,7333333

Identificação dos fatores significativos

Para identificar os fatores significativos faz- se um teste individual sobre a significância de cada parâmetro b_i

Se os resíduos seguem o modelo normal, os parâmetros b_i também irão seguir esse modelo, ou seja:

$$b_i \rightarrow N\left(\beta_i, \sigma_{bi}^2\right)$$

De modo que para testar as hipóteses H0: $\beta_i = 0$ e H1: $\beta_i \neq 0$ usa-se a distribuição de Student, calculando:

$$t_j = b_i / Sb_i$$

A hipótese nula será rejeitada quando:

$\left|t_i\right| > t_{\alpha/2}$, $n-k-1$ ou valor-p < 0,05 (5%)

	Coeficientes	*Erro padrão*	*Stat t*	*Valor-p*
Interseção	2,31120209	5,857302725	0,394584709	0,70007
Variável X 1	0,87720461	0,153034597	5,732067324	9,4E-05
Variável X 2	0,45592077	0,146762335	3,106524374	0,00908

Neste exemplo todos os termos são significativos, pois os valores-p são menores que 0,05 (5%). A equação de regressão é:

$$Y = 2,31 + 0,877X_1 + 0,459X_2$$

Os termos que não são significativos não devem permanecer no modelo. Logo, deve-se retirar um termo por vez e rodar novamente a rotina de regressão até definir um modelo com apenas termos significativos.

Análise do coeficiente de determinação R_2

R^2 é uma medida de quão bem a equação de regressão múltipla se ajusta as dados amostrais e indica a percentagem da variabilidade total que é explicada pelo modelo de regressão.

Se $R^2 = 1$, todas as observações estarão sobre o hiperplano definido pelo modelo.

Se $R^2 = 0$, não há nenhuma relação entre a variável de resposta e as variáveis independentes.

No exemplo, R^2 = *0,7376, ou seja*, 73,67% da variabilidade do fenômeno pode ser explicada pelo modelo de regressão.

Estatística de regressão	
R múltiplo	0,85836418
R-Quadrado	0,73678906
R-quadrado ajustado	0,69292057
Erro padrão	3,14078989
Observações	15

Análise do R^2 ajustado

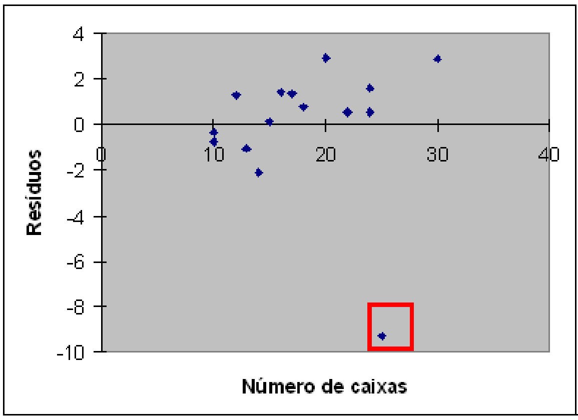
. O $R^2_{ajustado}$ é um ajuste do coeficiente de determinação R^2 modificado para levar em consideração o número de variáveis e o tamanho amostral.

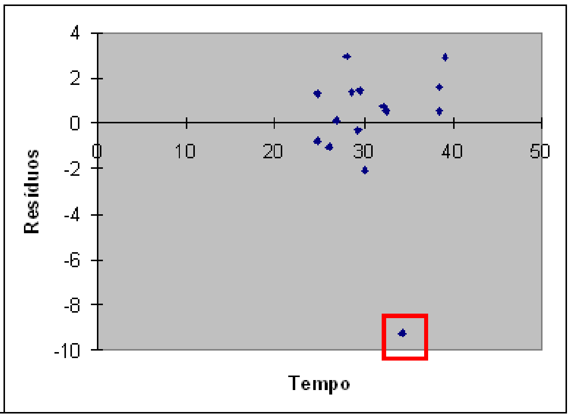
$$R^2_{ajustado} = 1 - \frac{(n-1)}{\left[n-(k+1)\right]}\left(1-R^2\right)$$

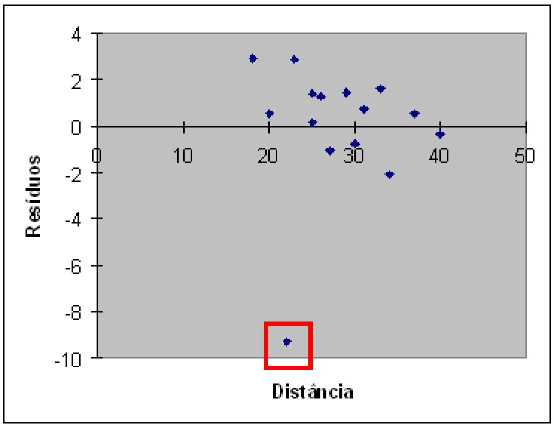
Onde: n é o tamanho da amostra e k é o número de variáveis independentes

Para analisar o valor do $R^2_{ajustado}$ deve-se compará-lo com o valor do R^2. Se esses valores forem muito diferentes, pode-se afirmar que há um excesso de variáveis no modelo.

Análise dos gráficos dos resíduos







Os resíduos do ponto 5 têm comportamento diferente dos resíduos dos outros pontos. Este fato pode indicar que este ponto não pertence a esse grupo de dados. Se houver registro de alguma causa especial que tenha afetado esta entrega em particular, essa observação pode ser eliminada do conjunto e a análise poderia ser refeita, possivelmente fornecendo um modelo mais preciso.

Dados Atípicos

Seguindo na análise, observar a coluna dos resíduos padronizados para verificar a existência de valores atípicos. Se isso acontecer o dado atípico deve ser eliminado e a rotina de regressão deve ser rodada novamente.

Observação	Y previsto	Resíduos	Resíduos padrão
1	24,7608713	-0,760871317	-0,261665052
2	26,8672905	0,132709479	0,045639035
3	29,320079	-0,320079022	-0,110075767
4	28,0618682	2,938131815	1,010428962
5	34,2715743	-9,271574323	-3,188511547
6	32,234429	0,765571022	0,263281289
7	24,6915975	1,308402542	0,449962053
8	30,0933728	-2,093372844	-0,71991479
9	29,5681782	1,431821786	0,492406159
10	38,478772	0,521227954	0,179251257
11	32,4825282	0,517471829	0,177959518
12	28,6216997	1,378300256	0,474000006
13	26,0247228	-1,02472284	-0,352404079
14	39,1135182	2,88648185	0,992666443
15	38,4094982	1,590501813	0,546976513

Codificação dos níveis

Nas equações de regressão múltipla, pode ser interessante comparar os efeitos dos diferentes fatores controláveis (termos) do modelo.

Neste caso, é necessário padronizar o intervalo de variação dos diferentes termos do modelo, para que os coeficientes sejam diretamente comparáveis entre si. É necessário converter os níveis reais do intervalo de investigação em níveis codificados do intervalo.

O nível baixo será o nível –1 e o nível alto será o nível +1

Apresenta-se a seguir como converter os níveis reais (NR) em níveis codificados (NC):

$$NC = \frac{NR - ((LSI - LII)/2 + LII)}{((LSI - LII)/2)}$$

onde:

VC representa o valor central do intervalo investigado $VC = ((LSI - LII)/2 + LII)$;

LSI representam o limite superior do intervalo investigado;

LII representam o limite inferior do intervalo investigado.

Por exemplo, o intervalo de investigação da temperatura é de 100 ºC a 120 ºC.

LII = 100 ºC e o LSI = 120 ºC.

$$VC = \frac{120 - 100}{2} + 100 = 110$$

O valor central é calculado como:

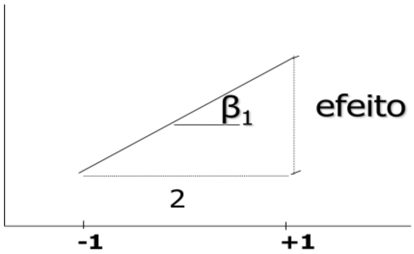
O nível 100 °C é calculado como: $NC = \frac{100-110}{(120-100)/2} = -1$

O nível 110 °C é calculado como $NC = \frac{110-110}{(120-100)/2} = 0$

E o nível 120 °C é calculado como $NC = \frac{120-110}{(120-100)/2} = +1$

Como os níveis variam de –1 a +1, o cálculo do coeficiente β1 (inclinação da reta) em uma equação de regressão equivale ao efeito do fator dividido por dois, ou seja,

$$\beta_1 = \frac{efeitoANOVA}{2}$$



1

10.16 FUNÇÃO DE PERDA MULTIVARIADA

10.16.2 Introdução à função de perda multivariada

Na maioria dos estudos experimentais, existe mais de uma variável de resposta de interesse, exigindo o uso de algum procedimento multivariado na busca do ajuste ótimo dos fatores controláveis.

O procedimento que será mostrado a seguir baseia-se na utilização da Função de Perda Multivariada. Trata-se de um procedimento bastante genérico que irá fornecer resultados consistentes na maioria das aplicações práticas.

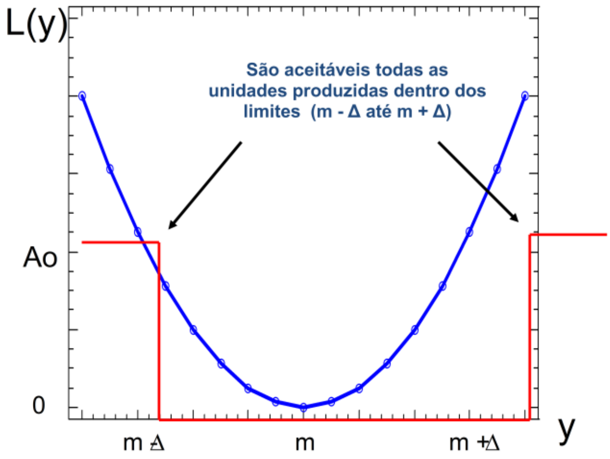
A função de perda é empregada para quantificar a perda que um produto impõem à sociedade pela falta de qualidade.

Em muitos casos, essa perda resulta aproximadamente proporcional ao quadrado do desvio da meta estabelecida para uma certa característica de qualidade, ou seja:

$$\hat{Z}_i = K_j \left[(Y_j - T_j)^2 \right]$$

Z(i) é a perda associada com o desvio da meta, para a unidade i;

Y é o valor medido da VR_j coletada em um determinado ajuste i dos FC i;
T é a meta para a respectiva VR_j;
k é o coeficiente de perda da qualidade, que converte o desvio do alvo em R$.



Na otimização, é preciso atribuir pesos a cada VR. Esses pesos, têm duas funções:

a) normalizar os valores que representam os desvios do alvo, obtidos nas unidades de grandeza da característica de qualidade, para que os desvios de todas as VR possam ser diretamente comparáveis;

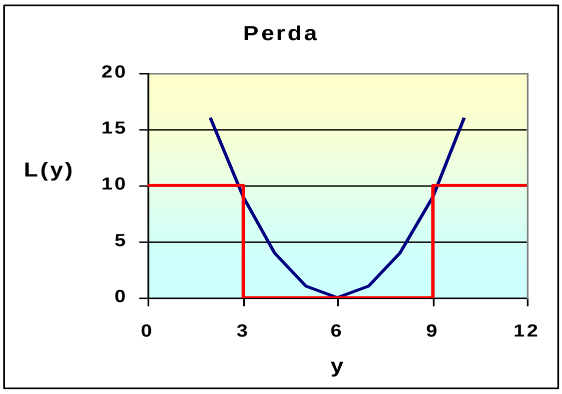
b) considerar a importância relativa (IR_j) de cada VR.

Para todas as variáveis de resposta Y_j, deve-se conhecer de antemão o seu valor alvo, os limites de especificação e a importância relativa (IR_j).

Existem três tipos variáveis de resposta: nominal-é-melhor, maior-é-melhor e menor-é-melhor.

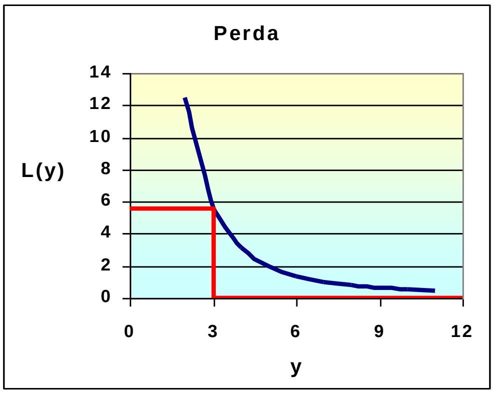
Nominal-é-melhor se refere às características que têm um valor alvo e qualquer desvio deste valor (para cima ou para baixo) incorre em uma perda de qualidade. Por exemplo, seja uma característica de qualidade cujo valor alvo é T = 6,0 e especificações de +/- 3,0.

Nominal-é-melhor: $K_j = \frac{IR_j}{((LSE-LIE)/2)^2}$



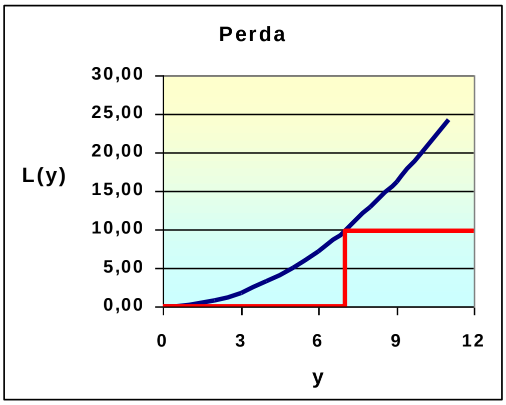
Maior-é-melhor se refere às características que têm um valor mínimo estabelecido e, se esse valor for superado tanto melhor. Por exemplo, seja uma característica cujo valor Alvo=12 e limite inferior de 3,0. Não existe limite superior de especificação.

Maior-é-melhor: $K_j = \frac{IR_j}{(alvo-LIE)^2}$



Menor-é-melhor se refere às características que têm um valor máximo estabelecido e, se esse valor for menor tanto melhor. Por exemplo, seja uma característica cujo valor Alvo=1 e limite inferior de 7,0. Não existe limite inferior de especificação.

Menor-é-melhor: $K_j = \frac{IR_j}{(LSE - alvo)^2}$



10.16.3 FUNÇÃO PERDA MULTIVARIADA

A expressão da função de perda multivariada é a seguinte:

$$\widehat{Z}\,(\mathrm{i}) \;= \sum_{J=1}^{J} \left[Kj \left[\left(\hat{Y}j - Tj \right)^2 \right] \right]$$

onde: Z(i) é o valor que a função de perda "Z" assume para um dado ajuste "i" do conjunto dos fatores controláveis;

K_j é a ponderação atribuída a VR "j";

$\hat{Y}_j$ é o modelo matemático que fornece uma estimativa da média da VR "j" em função do ajuste "i" dos fatores controláveis;

T_j é o valor alvo para a VR "j";

(nota: para VR do tipo maior é melhor ou menor é melhor, quando o valor de $\hat{Y}_j$ supera o alvo, atribui-se zero para o correspondente desvio do alvo).

EXEMPLO: Função de perda para a média de duas variáveis de resposta:

– primeira VR = Produtividade do tipo Maior-é-melhor

– segunda VR = Qualidade do tipo Nominal-é-melhor

$$\hat{Z}(i) = \frac{IR_1}{(alvo_1 - LIE_1)^2} \times \left(\hat{Y}_1 - T_1\right)^2 + \frac{IR_2}{\left((LSE_2 - LIE_2)/2\right)^2} \times \left(\hat{Y}_2 - T_2\right)^2$$

10.16.4 Notas sobre a Função perda Multivariada

Vale observar que a perda é funcão das VR Y, que por sua vez são função dos fatores controláveis X. Logo, em última análise tem-se que a perda é função de X, ou seja, é função do ajuste dos fatores controláveis.

Observa-se também que a perda cresce quadraticamente quando qualquer VR afasta-se do alvo (ou em regiões onde aumenta a variabilidade das VR). Assim, o objetivo é encontrar o ajuste dos fatores controláveis que minimiza a função perda.

Este ajuste ótimo estará associado a uma região onde as VR estão próximas de seus respectivos alvos (ou em regiões onde a variabilidade é pequena). Em projetos com muitos fatores, a busca do ponto ótimo exige suporte computacional.

O Solver do Excel pode ser usado para identificar a melhor combinação dos fatores controláveis que otimiza o conjunto das variáveis de resposta simultaneamente.

Bibliografia

1. ANG, A.H-S. & Tang, W.H. (1984), *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*. John Wiley and Sons, New York.

2. BOWKER & Lieberman, (1959), *Engineering Statistics*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

3. BOX, G., Hunter, W.G., and Hunter, J.S. (1978), *Statistics for experimenters*, John Wiley and Sons, New York.

4. DUNCAN, A.J. (1974), *Quality Control and Industrial Statistics*, 4th ed., Irwin, Homewood, ILL.

5. HICKS, C.R. (1973), *Fundamental Concepts in the Design of Experiments*. John Wiley and Sons, New York.

6. JOHNSON, N.L. & Leone, F.C. (1977), *Statistics and Experimental Design*. John Wiley and Sons, New York.

7. MILLER, I. & Freund, J.E. (1977), *Probability and Statistics for Engineers*. 2nd ed., Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

8. MONTGOMERY, D.C. (1984), *Design and analysis of experiments*. John Wiley and Sons, New York, 2nd ed.

9. MONTGOMERY, D.C. (1985), *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley and Sons, New York.

10. SHAPIRO, S.S. & Gross, A.J. (1981), *Statistical Modeling Technique*. Marcel Dekker, Inc, New York.

11. SNEDECOR, G.W. & Cochran, W.G. (1980), *Statistical Methods*. 7th ed., The Iowa State Univ. Press, Iowa, USA.

12. WERKEMA, M. C. C. *Ferramentas Estatísticas Básicas para o Gerenciamento do Processo,* Fundação Christiano Ottoni, Escola de Engenharia da UFMG, Belo Horizonte, MG,1995

13. WERKEMA, M. C. C. *Planejamento de experimentos,* Fundação Christiano Ottoni, Escola de Engenharia da UFMG, Belo Horizonte, MG,1995

Áreas sob a curva normal

(Cauda da esquerda)

z	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
-3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,6	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
-3,3	0,0003	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005	0,0005
-3,2	0,0005	0,0005	0,0005	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0007	0,0007
-3,1	0,0007	0,0007	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0009	0,0009	0,0009	0,0010
-3,0	0,0010	0,0010	0,0011	0,0011	0,0011	0,0012	0,0012	0,0013	0,0013	0,0013
-2,9	0,0014	0,0014	0,0015	0,0015	0,0016	0,0016	0,0017	0,0018	0,0018	0,0019
-2,8	0,0019	0,0020	0,0021	0,0021	0,0022	0,0023	0,0023	0,0024	0,0025	0,0026
-2,7	0,0026	0,0027	0,0028	0,0029	0,0030	0,0031	0,0032	0,0033	0,0034	0,0035
-2,6	0,0036	0,0037	0,0038	0,0039	0,0040	0,0041	0,0043	0,0044	0,0045	0,0047
-2,5	0,0048	0,0049	0,0051	0,0052	0,0054	0,0055	0,0057	0,0059	0,0060	0,0062
-2,4	0,0064	0,0066	0,0068	0,0069	0,0071	0,0073	0,0075	0,0078	0,0080	0,0082
-2,3	0,0084	0,0087	0,0089	0,0091	0,0094	0,0096	0,0099	0,0102	0,0104	0,0107
-2,2	0,0110	0,0113	0,0116	0,0119	0,0122	0,0125	0,0129	0,0132	0,0136	0,0139
-2,1	0,0143	0,0146	0,0150	0,0154	0,0158	0,0162	0,0166	0,0170	0,0174	0,0179
-2,0	0,0183	0,0188	0,0192	0,0197	0,0202	0,0207	0,0212	0,0217	0,0222	0,0228
-1,9	0,0233	0,0239	0,0244	0,0250	0,0256	0,0262	0,0268	0,0274	0,0281	0,0287
-1,8	0,0294	0,0301	0,0307	0,0314	0,0322	0,0329	0,0336	0,0344	0,0351	0,0359
-1,7	0,0367	0,0375	0,0384	0,0392	0,0401	0,0409	0,0418	0,0427	0,0436	0,0446
-1,6	0,0455	0,0465	0,0475	0,0485	0,0495	0,0505	0,0516	0,0526	0,0537	0,0548
-1,5	0,0559	0,0571	0,0582	0,0594	0,0606	0,0618	0,0630	0,0643	0,0655	0,0668
-1,4	0,0681	0,0694	0,0708	0,0721	0,0735	0,0749	0,0764	0,0778	0,0793	0,0808
-1,3	0,0823	0,0838	0,0853	0,0869	0,0885	0,0901	0,0918	0,0934	0,0951	0,0968
-1,2	0,0985	0,1003	0,1020	0,1038	0,1056	0,1075	0,1093	0,1112	0,1131	0,1151
-1,1	0,1170	0,1190	0,1210	0,1230	0,1251	0,1271	0,1292	0,1314	0,1335	0,1357
-1,0	0,1379	0,1401	0,1423	0,1446	0,1469	0,1492	0,1515	0,1539	0,1562	0,1587
-0,9	0,1611	0,1635	0,1660	0,1685	0,1711	0,1736	0,1762	0,1788	0,1814	0,1841
-0,8	0,1867	0,1894	0,1922	0,1949	0,1977	0,2005	0,2033	0,2061	0,2090	0,2119
-0,7	0,2148	0,2177	0,2206	0,2236	0,2266	0,2296	0,2327	0,2358	0,2389	0,2420
-0,6	0,2451	0,2483	0,2514	0,2546	0,2578	0,2611	0,2643	0,2676	0,2709	0,2743
-0,5	0,2776	0,2810	0,2843	0,2877	0,2912	0,2946	0,2981	0,3015	0,3050	0,3085
-0,4	0,3121	0,3156	0,3192	0,3228	0,3264	0,3300	0,3336	0,3372	0,3409	0,3446
-0,3	0,3483	0,3520	0,3557	0,3594	0,3632	0,3669	0,3707	0,3745	0,3783	0,3821
-0,2	0,3859	0,3897	0,3936	0,3974	0,4013	0,4052	0,4090	0,4129	0,4168	0,4207
-0,1	0,4247	0,4286	0,4325	0,4364	0,4404	0,4443	0,4483	0,4522	0,4562	0,4602
0,0	0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,4840	0,4880	0,4920	0,4960	0,5000

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Distribuição de Student - cauda da direita						
Pr (t > t_{alfa}) = alfa						
	Nível de significância - alfa					
GL	**0,250**	**0,100**	**0,050**	**0,025**	**0,010**	**0,005**
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
inf	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Distribuição do Qui Quadrado - cauda da direita										
Pr (QQ > QQ_{alfa}) = alfa										
	Nível de significância alfa									
GL	**0,995**	**0,990**	**0,975**	**0,950**	**0,900**	**0,010**	**0,050**	**0,025**	**0,010**	**0,005**
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,016	6,635	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	9,210	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	11,345	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	13,277	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	15,086	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	16,812	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	18,475	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	20,090	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	21,666	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	23,209	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	24,725	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	26,217	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	27,688	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	29,141	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	30,578	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	32,000	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	33,409	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	34,805	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	36,191	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	37,566	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	38,932	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	40,289	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	41,638	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	42,980	36,415	39,364	42,980	45,558
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	44,314	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	45,642	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,878	14,573	16,151	18,114	46,963	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	48,278	41,337	44,461	48,278	50,994
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	49,588	42,557	45,722	49,588	52,335
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	50,892	43,773	46,979	50,892	53,672

Distribuição F - cauda da direita

$Pr\ (F > F_{alfa(n1,n2)}) = alfa$

	Nível de significância - alfa = 0,05								
n2 \ n1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90

	Nível de significância - alfa = 0,05								
n2 \ n1	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**40**	**60**	**120**	**500**
1	241,9	243,9	245,9	248,0	250,1	251,1	252,2	253,3	254,1
2	19,40	19,41	19,43	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,49
3	8,79	8,74	8,70	8,66	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	5,96	5,91	5,86	5,80	5,75	5,72	5,69	5,66	5,64
5	4,74	4,68	4,62	4,56	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37
6	4,06	4,00	3,94	3,87	3,81	3,77	3,74	3,70	3,68
7	3,64	3,57	3,51	3,44	3,38	3,34	3,30	3,27	3,24
8	3,35	3,28	3,22	3,15	3,08	3,04	3,01	2,97	2,94
9	3,14	3,07	3,01	2,94	2,86	2,83	2,79	2,75	2,72
10	2,98	2,91	2,85	2,77	2,70	2,66	2,62	2,58	2,55
11	2,85	2,79	2,72	2,65	2,57	2,53	2,49	2,45	2,42
12	2,75	2,69	2,62	2,54	2,47	2,43	2,38	2,34	2,31
13	2,67	2,60	2,53	2,46	2,38	2,34	2,30	2,25	2,22
14	2,60	2,53	2,46	2,39	2,31	2,27	2,22	2,18	2,14
15	2,54	2,48	2,40	2,33	2,25	2,20	2,16	2,11	2,08
16	2,49	2,42	2,35	2,28	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02
17	2,45	2,38	2,31	2,23	2,15	2,10	2,06	2,01	1,97
18	2,41	2,34	2,27	2,19	2,11	2,06	2,02	1,97	1,93
19	2,38	2,31	2,23	2,16	2,07	2,03	1,98	1,93	1,89
20	2,35	2,28	2,20	2,12	2,04	1,99	1,95	1,90	1,86
21	2,32	2,25	2,18	2,10	2,01	1,96	1,92	1,87	1,83
22	2,30	2,23	2,15	2,07	1,98	1,94	1,89	1,84	1,80
23	2,27	2,20	2,13	2,05	1,96	1,91	1,86	1,81	1,77
24	2,25	2,18	2,11	2,03	1,94	1,89	1,84	1,79	1,75
25	2,24	2,16	2,09	2,01	1,92	1,87	1,82	1,77	1,73
26	2,22	2,15	2,07	1,99	1,90	1,85	1,80	1,75	1,71
27	2,20	2,13	2,06	1,97	1,88	1,84	1,79	1,73	1,69
28	2,19	2,12	2,04	1,96	1,87	1,82	1,77	1,71	1,67
29	2,18	2,10	2,03	1,94	1,85	1,81	1,75	1,70	1,65
30	2,16	2,09	2,01	1,93	1,84	1,79	1,74	1,68	1,64
40	2,08	2,00	1,92	1,84	1,74	1,69	1,64	1,58	1,53
60	1,99	1,92	1,84	1,75	1,65	1,59	1,53	1,47	1,41
80	1,95	1,88	1,79	1,70	1,60	1,54	1,48	1,41	1,35
100	1,93	1,85	1,77	1,68	1,57	1,52	1,45	1,38	1,31
500	1,85	1,77	1,69	1,59	1,48	1,42	1,35	1,26	1,16

Distribuição F - cauda da direita

Pr (F > $F_{alfa(n1,n2)}$) = alfa

	Nível de significância - alfa = 0,025								
n2 \ n1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,6	963,3
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,45	2,35	2,28
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24
500	5,05	3,72	3,14	2,81	2,59	2,43	2,31	2,22	2,14

	Nível de significância - alfa = 0,025								
n2 \ n1	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**40**	**60**	**120**	**500**
1	968,6	976,7	984,9	993,1	1001,4	1005,6	1009,8	1014,0	1017,2
2	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,47	39,48	39,49	39,50
3	14,42	14,34	14,25	14,17	14,08	14,04	13,99	13,95	13,91
4	8,84	8,75	8,66	8,56	8,46	8,41	8,36	8,31	8,27
5	6,62	6,52	6,43	6,33	6,23	6,18	6,12	6,07	6,03
6	5,46	5,37	5,27	5,17	5,07	5,01	4,96	4,90	4,86
7	4,76	4,67	4,57	4,47	4,36	4,31	4,25	4,20	4,16
8	4,30	4,20	4,10	4,00	3,89	3,84	3,78	3,73	3,68
9	3,96	3,87	3,77	3,67	3,56	3,51	3,45	3,39	3,35
10	3,72	3,62	3,52	3,42	3,31	3,26	3,20	3,14	3,09
11	3,53	3,43	3,33	3,23	3,12	3,06	3,00	2,94	2,90
12	3,37	3,28	3,18	3,07	2,96	2,91	2,85	2,79	2,74
13	3,25	3,15	3,05	2,95	2,84	2,78	2,72	2,66	2,61
14	3,15	3,05	2,95	2,84	2,73	2,67	2,61	2,55	2,50
15	3,06	2,96	2,86	2,76	2,64	2,59	2,52	2,46	2,41
16	2,99	2,89	2,79	2,68	2,57	2,51	2,45	2,38	2,33
17	2,92	2,82	2,72	2,62	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26
18	2,87	2,77	2,67	2,56	2,44	2,38	2,32	2,26	2,20
19	2,82	2,72	2,62	2,51	2,39	2,33	2,27	2,20	2,15
20	2,77	2,68	2,57	2,46	2,35	2,29	2,22	2,16	2,10
21	2,73	2,64	2,53	2,42	2,31	2,25	2,18	2,11	2,06
22	2,70	2,60	2,50	2,39	2,27	2,21	2,14	2,08	2,02
23	2,67	2,57	2,47	2,36	2,24	2,18	2,11	2,04	1,99
24	2,64	2,54	2,44	2,33	2,21	2,15	2,08	2,01	1,95
25	2,61	2,51	2,41	2,30	2,18	2,12	2,05	1,98	1,92
26	2,59	2,49	2,39	2,28	2,16	2,09	2,03	1,95	1,90
27	2,57	2,47	2,36	2,25	2,13	2,07	2,00	1,93	1,87
28	2,55	2,45	2,34	2,23	2,11	2,05	1,98	1,91	1,85
29	2,53	2,43	2,32	2,21	2,09	2,03	1,96	1,89	1,83
30	2,51	2,41	2,31	2,20	2,07	2,01	1,94	1,87	1,81
40	2,39	2,29	2,18	2,07	1,94	1,88	1,80	1,72	1,66
60	2,27	2,17	2,06	1,94	1,82	1,74	1,67	1,58	1,51
80	2,21	2,11	2,00	1,88	1,75	1,68	1,60	1,51	1,43
100	2,18	2,08	1,97	1,85	1,71	1,64	1,56	1,46	1,38
500	2,07	1,97	1,86	1,74	1,60	1,52	1,42	1,31	1,19

Distribuição F - cauda da direita

Pr (F > $F_{alfa(n1,n2)}$) = alfa

Nível de significância - alfa = 0,01

n2 \ n1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5928	5981	6022
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44

Nível de significância - alfa = 0,01

n2 \ n1	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**40**	**60**	**120**	**500**
1	6056	6107	6157	6209	6260	6286	6313	6340	6360
2	99,40	99,42	99,43	99,45	99,47	99,48	99,48	99,49	99,50
3	27,23	27,05	26,87	26,69	26,50	26,41	26,32	26,22	26,15
4	14,55	14,37	14,20	14,02	13,84	13,75	13,65	13,56	13,49
5	10,05	9,89	9,72	9,55	9,38	9,29	9,20	9,11	9,04
6	7,87	7,72	7,56	7,40	7,23	7,14	7,06	6,97	6,90
7	6,62	6,47	6,31	6,16	5,99	5,91	5,82	5,74	5,67
8	5,81	5,67	5,52	5,36	5,20	5,12	5,03	4,95	4,88
9	5,26	5,11	4,96	4,81	4,65	4,57	4,48	4,40	4,33
10	4,85	4,71	4,56	4,41	4,25	4,17	4,08	4,00	3,93
11	4,54	4,40	4,25	4,10	3,94	3,86	3,78	3,69	3,62
12	4,30	4,16	4,01	3,86	3,70	3,62	3,54	3,45	3,38
13	4,10	3,96	3,82	3,66	3,51	3,43	3,34	3,25	3,19
14	3,94	3,80	3,66	3,51	3,35	3,27	3,18	3,09	3,03
15	3,80	3,67	3,52	3,37	3,21	3,13	3,05	2,96	2,89
16	3,69	3,55	3,41	3,26	3,10	3,02	2,93	2,84	2,78
17	3,59	3,46	3,31	3,16	3,00	2,92	2,83	2,75	2,68
18	3,51	3,37	3,23	3,08	2,92	2,84	2,75	2,66	2,59
19	3,43	3,30	3,15	3,00	2,84	2,76	2,67	2,58	2,51
20	3,37	3,23	3,09	2,94	2,78	2,69	2,61	2,52	2,44
21	3,31	3,17	3,03	2,88	2,72	2,64	2,55	2,46	2,38
22	3,26	3,12	2,98	2,83	2,67	2,58	2,50	2,40	2,33
23	3,21	3,07	2,93	2,78	2,62	2,54	2,45	2,35	2,28
24	3,17	3,03	2,89	2,74	2,58	2,49	2,40	2,31	2,24
25	3,13	2,99	2,85	2,70	2,54	2,45	2,36	2,27	2,19
26	3,09	2,96	2,81	2,66	2,50	2,42	2,33	2,23	2,16
27	3,06	2,93	2,78	2,63	2,47	2,38	2,29	2,20	2,12
28	3,03	2,90	2,75	2,60	2,44	2,35	2,26	2,17	2,09
29	3,00	2,87	2,73	2,57	2,41	2,33	2,23	2,14	2,06
30	2,98	2,84	2,70	2,55	2,39	2,30	2,21	2,11	2,03
40	2,80	2,66	2,52	2,37	2,20	2,11	2,02	1,92	1,83
60	2,63	2,50	2,35	2,20	2,03	1,94	1,84	1,73	1,63
80	2,55	2,42	2,27	2,12	1,94	1,85	1,75	1,63	1,53
100	2,50	2,37	2,22	2,07	1,89	1,80	1,69	1,57	1,47
500	2,36	2,22	2,07	1,92	1,74	1,63	1,52	1,38	1,23